

Bestimmung von kostenoptimaler Mindestlosgröße und Lagererneuerungsgrenze

Werner Popp

1980

BESTIMMUNG VON KOSTENOPTIMALER MINDESTLOSGRÖSSE
UND LAGERERNEUERUNGSGRENZE

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
einer Hohen Staatswirtschaftlichen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität
zu München

vorgelegt von

Werner Popp

aus

Selb/Ofr.

1960



Referent: Professor Dr. Hans Kellerer

Korreferent: Professor Dr. Oskar Anderson jun.

Tag der mündlichen Prüfung: 20. 12. 1960

1898

Erst nach dem Tode des Vaters, der im Jahre 1898 starb, kam ich zum ersten Mal in die Welt. Ich wurde am 1. März 1898 geboren. Ich bin die einzige Tochter des Vaters. Ich bin die einzige Tochter des Vaters. Ich bin die einzige Tochter des Vaters.

Ich bin die einzige Tochter des Vaters. Ich bin die einzige Tochter des Vaters. Ich bin die einzige Tochter des Vaters. Ich bin die einzige Tochter des Vaters. Ich bin die einzige Tochter des Vaters.

MEINEN ELTERN

Ich bin die einzige Tochter des Vaters. Ich bin die einzige Tochter des Vaters. Ich bin die einzige Tochter des Vaters. Ich bin die einzige Tochter des Vaters. Ich bin die einzige Tochter des Vaters.

Ich bin die einzige Tochter des Vaters. Ich bin die einzige Tochter des Vaters. Ich bin die einzige Tochter des Vaters. Ich bin die einzige Tochter des Vaters. Ich bin die einzige Tochter des Vaters.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555225_0056

VORWORT

Während einer etwas mehr als einjährigen Tätigkeit war vom Verfasser das in der vorliegenden Dissertation behandelte Optimierungsproblem bei der Badischen Anilin- und Soda-Fabrik in Ludwigshafen am Rhein zu lösen. Zur Bearbeitung von umfangreichem Datenmaterial stand eine elektronische Grossrechenanlage IBM 704 zur Verfügung.

Bei der Lösung einiger spezieller Probleme war es sehr schwer, den Wünschen und Forderungen der nach Wirtschaftlichkeit strebenden Praxis einerseits und der Forderung nach möglichst hoher theoretischer Exaktheit andererseits zu genügen. Meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. Hans Kellerer, möchte ich für das Verständnis für die Schwierigkeiten der Arbeit sowie für seine wertvollen theoretischen und praktischen Hinweise und die stets fürsorgliche Förderung der Arbeit ganz besonders danken.

Herrn Professor Dr. Oskar Anderson jun. bin ich für zahlreiche Anregungen und Herrn Professor Dr. Josef Pfanzagl für die Kritik eines Manuskriptes, dessen Überarbeitung zu vielen Verbesserungen führte, zu Dank verpflichtet.

In der Badischen Anilin- und Soda-Fabrik, im besonderen durch Herrn Direktor Dr. Franz J. P. Leitz, fand meine Arbeit grosszügige Unterstützung. Dem Leiter des Mathematischen Büros des BASF, Herrn Dipl.-Mathematiker Klaus Wenke, verdanke ich fruchtbare theoretische Hinweise und viele Ratschläge zu einer rationellen Datenverarbeitung auf der Rechenanlage.

München, im November 1960

Werner Popp

INHALTSVERZEICHNIS

Seite

1	<u>EINLEITUNG</u>	
2	<u>DIE BETRIEBLICHEN BEDINGUNGEN</u>	
21	VORBEMERKUNG	5
22	BEDINGUNGEN DER ORGANISATION	5
23	BEDINGUNGEN DER PRODUKTION	11
24	BEDINGUNGEN FÜR DEN ABSATZ	16
25	BEDINGUNGEN DER LAGERHALTUNG	17
26	DIE FRAGE DER UNABHÄNGIGKEIT DER PRODUKTE	19
	ANHANG	21
3	<u>ERFASSUNG DER NACHFRAGE</u>	
31	ZUR EINFÜHRUNG	23
32	ZUM VERFAHREN DER NACHFRAGEERFASSUNG	23
	321 Die Nachfragereihe	23
	322 Zur Erfassung der Nachfragereihe	26
33	PRÜFUNG EINER NACHFRAGEREIH E AUF ZUFALLSVER- TEILUNG	27
	331 Zum Prüfverfahren	27
	332 Prüfung einer Zeitreihe mit einer regelmässigen zyklischen Komponente und einer schwachen Zufallskomponente . . .	29
	333 Prüfung einer Zeitreihe mit einer regelmässigen zyklischen Komponente und einer starken Zufallskomponente	30
	334 Anwendung des Prüfverfahrens auf ein praktisches Beispiel	32
34	ZERLEGUNG EINER ZUFALLSVERTEILTEN NACHFRAGEREIH E IN KOMPONENTEN	32
	341 Gründe der Zerlegung	32
	342 Systematik der Zerlegung	33
	343 Zerlegung einer Nachfragereihe gezeigt am praktischen Bei- spiel	34

	Seite
35 PRÜFUNG DER KOMPONENTE DER BESTELLFOLGE AUF ZUFALLSVERTEILUNG	35
351 Zum Prinzip der Prüfung	35
352 Prüfung der Anzahl der Bestelltage in unmittelbar aufeinanderfolgenden Wochen	36
353 Prüfung der Verteilung der Bestelltage innerhalb der Wochen auf Zufälligkeit	37
36 PRÜFUNG DER MENGENKOMPONENTE AUF ZUFALLSVERTEILUNG	38
361 Zum Prinzip der Prüfung	38
362 Durchführung der Prüfung für das praktische Beispiel	39
37 DIE VERTEILUNGSGESETZE DER KOMPONENTEN	39
371 Zum Verteilungsgesetz der Komponente der Bestellfolge	39
372 Zum Verteilungsgesetz der MengenkompONENTE	41
373 Zusammenfassung	53
38 BILDUNG EINER ZUFALLSERZEUGTEN NACHFRAGEREIH E	54
381 Begriff der zufallserzeugten Nachfragerreihe	54
382 Zufallszahlen	54
383 Die Entstehung der zufallserzeugten Nachfragerreihe im einzelnen	55
384 Ein Beispiel einer zufallserzeugten Nachfragerreihe	57
4 <u>BILDUNG EINES MODELLS ZUR BESTIMMUNG VON OPTIMALER MINDESTLOSGRÖSSE UND LAGERERNEUERUNGSGRENZE</u>	
41 ZUR EINFÜHRUNG	59
42 DER MODELLABLAUF	59
421 Zur Gliederung	59
422 Der Modellablauf für Grossbestellmengen	60
423 Der Modellablauf für Kleinbestellmengen	61
424 Bestimmung der Grössen Zeitmengenbestand und Zeitmengen- defizit	63
425 Zum Beginn des Modellablaufs	64
426 Ablaufdiagramm	64

	Seite
43 THEORETISCHE BESTIMMUNG DER KOSTEN JE PRODUZIERTER EINHEIT UND FORMULIERUNG DER ZIELFUNKTION	66
431 Die Kosten je produzierter Einheit für einen Zeitraum N	66
432 Die Zielfunktion	67
433 Vereinfachung der Zielfunktion	68
44 PRAKTISCHE BESTIMMUNG DER VERMINDERTEN KOSTEN JE PRODUZIERTER EINHEIT	69
441 Zur Simulationstechnik	69
442 Bestimmung der verminderten Kosten je produzierter Einheit für eine Kombination von Mindestlosgrösse und Lagererneuerungsgrenze	71
443 Bestimmung der verminderten Kosten je produzierter Einheit für mehrere Kombinationen von Werten der Mindestlosgrösse und der Lagererneuerungsgrenze	77
444 Einfluss der Länge des theoretischen Untersuchungszeitraums auf die verminderten Kosten je produzierter Einheit	78
445 Bestimmung der verminderten Kosten je produzierter Einheit für das praktische Beispiel	79
45 BESTIMMUNG EINER KOSTENFUNKTION	80
46 MINIMIERUNG DER KOSTENFUNKTION UND BESTIMMUNG DER OPTIMALEN KOMBINATION VON MINDESTLOSGRÖSSE UND LAGERERNEUERUNGSGRENZE	83
47 ZUR PRAKTISCHEN ANWENDUNG	85
ANHANG	87
LITERATURVERZEICHNIS	89

1 EINLEITUNG

Die vorliegende Arbeit baut auf Erfahrungen auf, die in der Chemischen Industrie bei der Untersuchung eines Grossbetriebes der Badischen Anilin- und Soda-Fabrik in Ludwigshafen a. Rh. gesammelt wurden. Bevor wir auf Einzelheiten eingehen, soll ein kurzer Überblick über die zu behandelnden Probleme gegeben werden.

Zu untersuchen ist ein Betrieb der Sortenfertigung, der der Herstellung von Produkten dient, die sich nur in technischen Einzelheiten unterscheiden¹ und die aus dem gleichen Rohstoff, zeitlich hintereinander und nach dem gleichen Fertigungsverfahren hergestellt werden.

Durch den Begriff Sorte wird nur eine qualitative Aussage über die Art des zu fertigenden Produktes gemacht. Die Mengen, in welchen die Sorten produziert werden, bezeichnen wir als Losgrössen.

Zu lösen ist ein Problem der Planung für Produktion und Lagerhaltung. Das Problem der Produktionsplanung besteht darin, für die Losgrössen der verschiedenen Produkte Untergrenzen zu bestimmen, die wir als Mindestlosgrössen bezeichnen. Für die Planung in der Lagerhaltung sollen Mindestlagerbestandswerte ermittelt werden, die wir als Lagererneuerungsgrenzen bezeichnen. Sie sollen der Erneuerung der durch Kundenbestellungen verminderten Lagerbestände dienen.

Mindestlosgrössen und Lagererneuerungsgrenzen sind nach dem ökonomischen Prinzip zu bestimmen², das in der Gewinnmaximierung oder Kostenminimierung bestehen kann. Es kann gezeigt werden, dass für den Fall einer vorgegebenen, nicht beeinflussbaren Absatzmenge und bei festen Marktpreisen Gewinnmaximierung und Kostenminimierung identisch sind, d.h. Gewinnmaximierung bei der Kostenminimierung bzw. Kostenminimierung bei der Gewinnmaximierung gegeben ist. Ist in einem Zeitraum N die Absatzmenge eines Produktes K_N ,

¹ GUTENBERG, E.: Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, 1. Band, Die Produktion, 5. Auflage, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1960, S.334

² HEINEN, E.: Betriebswirtschaftliche Kostenlehre, Band I, Grundlagen, Wiesbaden 1959, S.31

der Marktpreis je Einheit p und der Kostensatz je Einheit g , so ist der Gesamtgewinn G :

$$G = K_N \cdot p - K_N \cdot g$$

Ist in dieser Gleichung nur g beeinflussbar, so hat G ein Maximum, wenn g minimiert wird.

Für die darzustellende betriebliche Untersuchung sind die Absatzmenge K_N und der Marktpreis p fest vorgegeben; g ist durch die Festlegung von Mindestlosgrösse und Lagererneuerungsgrenze zu beeinflussen. Wenn dabei im folgenden nur noch von Kostenminimierung gesprochen wird, bedeutet dies immer zugleich Gewinnmaximierung.

Eine Lösung des gestellten Optimierungsproblems allein mit Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie würde die Anwendung sehr komplizierter mathematisch-statistischer Methoden notwendig machen. Es werden deshalb neben der Wahrscheinlichkeitstheorie Methoden der Simulationstechnik und der mathematischen Analysis angewandt, die eine verhältnismässig einfache Lösung des Problems erlauben. Die Simulationstechnik kann dabei als ein Verfahren angesehen werden, das mit "zufallserzeugten" Werten ein Modell untersucht.

Wenn diese Methode zur Lösung umfangreicher Probleme gebraucht wird, z. B. wenn für viele Produkte Optimalbedingungen in Produktion und Lagerhaltung festgestellt werden sollen, kann die Simulation nur mit Hilfe einer elektronischen Grossrechenanlage durchgeführt werden. Da eine Stunde Rechnen auf einer Grossrechenanlage IBM 704, auf der die Untersuchung der Badischen Anilin- und Soda-Fabrik durchgeführt wurde, zur Zeit etwa DM 3 000.- kostet, können Überlegungen für eine rationelle Datenverarbeitung viel Geld sparen und den Nutzen einer Untersuchung erhöhen; allerdings nimmt dabei die Ausarbeitung des Problems entsprechend mehr Zeit in Anspruch.

Für die Modellbildung ist es zunächst notwendig, die betrieblichen Bedingungen, die im Modell berücksichtigt werden sollen, zu erfassen. Sie stellen eine Auswahl der wichtigsten in der Praxis gegebenen Bedingungen dar und entsprechen weitestgehend der Wirklichkeit. Wichtig ist vor allem die Bedingung der Unabhängigkeit der einzelnen Produkte, die es erlaubt, jedes der Produkte unabhängig von allen übrigen zu behandeln. Dieser Umstand führt zu einer verhältnismässig einfachen Lösung des Optimierungsproblems. Zu den betrieblichen

Bedingungen zählt auch die Struktur der Nachfragereihen. Der hier zu behandelnde Typ von Reihen zeigt bei einer analytischen Untersuchung zufällige Zahlenfolgen in den Reihen selbst und auch bei der Zerlegung in Komponenten. Über Gesetzmässigkeiten, die in den Komponenten als Verteilungen festzustellen sind, ist es möglich, die Reihen durch 3 Parameter zu erfassen.

Mit der Formulierung der betrieblichen Bedingungen wird die Grundlage für die Modellbildung gegeben. Im Modell werden alle betrieblichen Entscheidungen und Vorgänge vom Bestelleingang eines Kunden bis zur Auslieferung der Mengen erfasst. Wir beschreiben das Modell zuerst verbal und formulieren es dann kurz in Symbolen.³

Der Inhalt des Modells besteht zunächst in der Darstellung der betrieblichen Bedingungen und Zusammenhänge; insofern können wir von einem "Erklärungsmodell"⁴ sprechen. Da durch das Modell aber entschieden werden soll, wie Mindestlosgrösse und Lagererneuerungsgrenze zu wählen sind, ist das Modell auch ein "Entscheidungsmodell"⁴ (decision model).

Die Lösung des Modellproblems beginnt mit der Bildung von Bestellmengen mit Hilfe von Zufallszahlen und den jeweils für ein Produkt ermittelten 3 Parametern der Nachfragereihen. Mit den "zufallserzeugten" Werten wird im Modell das Betriebsgeschehen in der Praxis vom Bestelleingang bis zur Auslieferung der Bestellmengen an die Kunden "nachgespielt". Der Zweck dieses Vorgehens ist, die beim Betriebsablauf entstehenden Kosten im Modell zu bestimmen. Wir berechnen die Kosten bezogen auf die produzierte Einheit.

Eine Vereinfachung lässt sich nachweisen, indem die der Produktionsmenge proportionalen Kosten als unwichtig für das Ergebnis des Optimierungsproblems aus der Untersuchung ausgeschieden werden können. Die Kosten je produzierter Einheit ohne den proportionalen Kostenanteil werden als verminderte Kosten je produzierter Einheit bezeichnet.

Die Frage des Optimierungsproblems lautet nun, wie Mindestlosgrösse und

³ Je nach der Wahl des Ausdrucksmittels unterscheidet hier FRENCKNER zwischen verbalen und symbolischen Modellen.

FRENCKNER, P. T.: Betriebswirtschaftslehre und Verfahrensforschung, Zeitschrift für handelswissenschaftliche Forschung, 9. Jahrgang 1957, S. 65.

⁴ FRENCKNER, P. T., a. a. O., S. 71

Lagererneuerungsgrenze so zu wählen sind, dass die verminderten Kosten je produzierter Einheit ein Minimum haben. Zur Lösung der Frage werden zunächst verminderte Kostenwerte je produzierter Einheit in Abhängigkeit von möglichen Kombinationen von Mindestlosgrösse und Lagererneuerungsgrenze bestimmt. Diese Kostenwerte geben dann einen Anhaltspunkt für die Berechnung eines funktionalen Zusammenhanges zwischen den verminderten Kosten je produzierter Einheit und den Werten der Mindestlosgrösse sowie der Lagererneuerungsgrenze. Die dem Minimum dieser Funktion zugeordneten Koordinaten sind die gesuchte Lösung unseres Problems.

Eine Bestimmung von Vertrauensbereichen der Ergebnisse unserer Untersuchung ist mit Verfahren der Sensitivity Analysis⁵ möglich, durch die festzustellen ist, wie stark der Einfluss von Veränderungen einer bestimmten Grösse eines Systems, z. B. eines geschätzten Parameters in unserem Modell, auf andere Grössen des Systems ist, wie etwa das Ergebnis des Optimierungsproblems. Jedoch muss für die gegebene umfangreiche betriebliche Untersuchung aus Wirtschaftlichkeitsüberlegungen auf diese Verfeinerung verzichtet werden. Es wird als Ergebnis für ein Produkt nur eine bestimmte optimale Kombination von Mindestlosgrösse und Lagererneuerungsgrenze ermittelt.

⁵ MAFFEI, R. B.: Simulation, Sensitivity and Management Decision Rules, Journal of Business, University of Chicago, Vol. 31, S. 177; Sensitivity analysis, as it shall be described, offers a first approximation guide, that often gives an indication of when to be conscious of the dangers of unrecognized interdependence and hence suggests when there may be a need to develop more complicated ways to study a decision problem.

2 DIE BETRIEBLICHEN BEDINGUNGEN

21 VORBEMERKUNG

Die hier zu formulierenden betrieblichen Bedingungen gelten, wie bereits erwähnt, für einen speziellen Grossbetrieb der Chemischen Industrie. Für ihre Erfassung gliedern wir den Betrieb in Bereiche auf. Im Rahmen des zu bildenden Modells sind dabei nur folgende Bereiche von Interesse: Organisation, Produktion, Absatz und Lagerhaltung. Es erweist sich aus Gründen der Übersichtlichkeit als zweckmässig, eine Fragestellung, die für alle Bereiche gemeinsam besteht, aus der Untersuchung der einzelnen Bereiche auszugliedern und in einem besonderen Abschnitt zusammenzufassen; es ist dies die Frage der Unabhängigkeit der einzelnen Produkte.

Wir sagen, Produkte sind voneinander unabhängig, wenn Entscheidungen, die für eines der Produkte getroffen werden, keinen Einfluss auf Entscheidungen für die übrigen Produkte haben. Wir bezeichnen sie als voneinander abhängig, wenn ein Einfluss besteht. Wie in der Einführung zur Themenstellung hingewiesen wurde, ist das Ergebnis der Prüfung auf Unabhängigkeit entscheidend für die Frage, ob die Produkte in Abhängigkeit voneinander gleichzeitig oder unabhängig voneinander einzeln zu untersuchen sind.

Als Masseneinheiten gelten im folgenden: für Mengen ein Kilogramm, für die Zeit ein Tag und für Kosten eine Deutsche Mark.

22 BEDINGUNGEN DER ORGANISATION

Die Bedingungen der Organisation werden durch die Betriebsführung festgelegt und sind für alle Produkte gleich.

Die erste Bedingung der Organisation betrifft die Wahl des Untersuchungsmerkmals bei der Erfassung der Nachfrage. Beim Betrieb tritt die Nachfrage der Kunden in Form von Einzelbestellungen in Erscheinung. Dabei ist eine Einzelbestellmenge die

an einem bestimmten Tag,
von einem bestimmten Kunden,
von einem bestimmten Produkt,

bestellte Menge. An einem Tag können für ein bestimmtes Produkt keine, eine oder mehrere Einzelbestellungen nachgefragt werden. Wir nennen Tage mit

mindestens einer Einzelbestellmenge Bestelltage, und Tage ohne Bestelleingang Nichtbestelltage.

Wollen wir die Nachfrage unter Berücksichtigung der Merkmale Bestelltag, Nichtbestelltag und Einzelbestellmenge erfassen, so ist für jeden Tag festzustellen:

- a) ob er ein Bestelltag oder Nichtbestelltag ist,
- b) für den Fall eines Bestelltages, wie gross die Zahl der Einzelbestellmengen ist und
- c) wie gross die Einzelbestellmengen sind.

Eine Vereinfachung der Nachfrageerfassung ergibt sich bei der Wahl eines anderen Untersuchungsmerkmals: der Tagesbestellmenge. Sie ist die Summe aller Einzelbestellmengen an einem bestimmten Tag und für ein bestimmtes Produkt. Die Tagesbestellmengen sind an Nichtbestelltagen gleich Null, an Bestelltagen grösser Null und bilden so eine Nachfragereihe (Zeitreihe) aus Werten grösser oder gleich Null. Für unsere betriebliche Untersuchung wird durch die 1. Bedingung der Organisation die Tagesbestellmenge als Untersuchungsmerkmal festgelegt. Diese Bedingung wurde von der Betriebsführung vorgegeben, weil als Zahlenmaterial die Tagesbestellmengen zur Verfügung standen und eine Erfassung und Untersuchung der Nachfrage über Einzelbestellmengen zu hohen Kosten geführt hätte.

Weitere Bedingungen der Organisation werden mit der Mindestlosgrösse und der Lagererneuerungsgrenze eingeführt.

Die Mindestlosgrösse X hat in dieser Arbeit, neben der Festlegung einer aus wirtschaftlichen Überlegungen bestimmten Untergrenze der Losgrösse, eine weitere Bedeutung. Sie trennt die Tagesbestellmengen in:

- a) Grossbestellmengen und
- b) Kleinbestellmengen.

Zur Veranschaulichung wollen wir annehmen, dass einmal täglich nach Eingang der Post, z. B. um 10 Uhr morgens des Tages t , die Tagesbestellmenge z_t eines Produktes ermittelt wird. Sie ist Ausgangspunkt der betrieblichen Dispositionen, die einmal täglich durchgeführt werden. Ist die Tagesbestellmenge grösser oder gleich der Mindestlosgrösse X , wird sie als Grossbestellmenge angesehen und es wird für sie an die Produktion ein Auftrag gegeben, der in Höhe der Grossbestellmenge ausgeführt wird; nach der Fertigstellung wird die produzierte

Menge direkt an die Kunden ausgeliefert.

Ist die Tagesbestellmenge des Produktes kleiner als X , so wird sie als Kleinbestellmenge behandelt und nicht nach Produktion, sondern ab Lager geliefert. Die laufende Auffüllung des Lagers wird durch Lageraufträge an die Produktion veranlasst, die grösser oder gleich der Mindestlosgrösse X sind.⁶

Der Sinn dieser Regelung ist, dass alle Tagesbestellmengen eines Produktes als Aufträge zur Produktion gegeben werden sollen, ausser denjenigen, die so klein sind, dass es aus wirtschaftlichen Gründen günstiger ist, sie ab Lager zu liefern und ihre Produktion in Aufträgen grösser oder gleich X zusammenzufassen. Wir haben hier den Fall, dass alle Aufträge, und damit die in der Produktion gefertigten Lose, die Grösse X nicht unterschreiten, d.h. es wird die Forderung der Mindestlosgrösse, die die 2. Bedingung der Organisation darstellt, eingehalten.

Zur Erklärung der Bedeutung der Lagererneuerungsgrenze Y sind zunächst zwei Begriffe zu definieren, die wir im Bereich der Lagerhaltung unterscheiden; es sind die Begriffe Lagergrösse und Dispositionsgrösse.

Bei der Definition der Lagergrösse E_t für den Tag t unterscheiden wir zwei Möglichkeiten;

- a) ist E_t positiv oder Null, sprechen wir von Lagerbestand; er umfasst die tatsächlich auf Lager liegenden Mengen;
- b) ist E_t negativ, sprechen wir von Lagerdefizit⁷; es umfasst die noch ab Lager zu liefernden aber gerade nicht verfügbaren Mengen.

Die Lagergrösse kann folgende Veränderungen erfahren:

- a) sie wird vermehrt durch Lagereingänge, die von der Produktion in Höhe der gegebenen Lageraufträge zur Lagerhaltung kommen, und
- b) sie wird vermindert durch Tagesbestellmengen kleiner X .

⁶ Über Zeitpunkt und Grösse der Lageraufträge folgen noch nähere Ausführungen. Vgl. S.8

⁷ Vgl. Handwörterbuch der Betriebswirtschaft, 3.Auflage, Stuttgart 1955, S.3677. Es wird hier für Lagerdefizit der Begriff Lieferungsrückstand gebraucht. Bei der Definition der Lagergrössen in dieser Arbeit hat sich gezeigt, dass der Begriff Lagerdefizit zu einem übersichtlicheren System führt. Er wurde deshalb dem Begriff Lieferungsrückstand vorgezogen.

Die Dispositionsgrösse hat allein den Zweck, die laufende Auffüllung des durch Bestellmengen verminderten Lagers zu regeln. Man verwendet zur Lagerdisposition nicht die Lagergrösse, weil mit Hilfe der Dispositionsgrösse erreicht werden soll, dass bei Entscheidungen zur Wiederauffüllung des Lagers die in Auftrag gegebenen, aber noch nicht fertiggestellten Lageraufträge mit berücksichtigt werden. Der Begriff der Dispositionsgrösse P_t für den Tag t ist so umfassender als der der Lagergrösse E_t . Bezeichnen wir die auf Grund der Lageraufträge in der Produktion herzustellenden, aber noch nicht fertiggestellten Mengen als erwartete Lagereingänge, können wir die Dispositionsgrösse definieren als Summe der Lagergrösse und der erwarteten Lagereingänge. Die Dispositionsgrösse kann grösser oder gleich und kleiner Null sein und wir bezeichnen auch hier die Werte grösser oder gleich Null als Bestände und die kleiner Null als Defizite. Veränderungen der Dispositionsgrösse können erfolgen;

- a) durch Tagesbestellmengen kleiner X , die die Lagergrösse und damit auch die Dispositionsgrösse vermindern und
- b) durch die Ausstellung neuer Lageraufträge, die die erwarteten Lagereingänge und so auch die Dispositionsgrösse erhöhen.

Nicht verändert wird die Dispositionsgrösse, wenn in der Produktion ein Lagerauftrag fertiggestellt wird, dessen Menge als Lagereingang die Lagergrösse erhöht; denn die Erhöhung der Lagergrösse und die Verminderung der erwarteten Lagereingänge gleichen sich im Summenwert Dispositionsgrösse aus.

Mit Hilfe der definierten Dispositionsgrösse sowie der Lagererneuerungsgrenze Y und der Mindestlosgrösse X werden der Zeitpunkt für die Entstehung eines Lagerauftrags und die Auftragshöhe durch die 3. und 4. Bedingung der Organisation bestimmt.

Die 3. Bedingung der Organisation lautet:

der Zeitpunkt für die Entstehung eines Lagerauftrages ist gegeben, wenn die Dispositionsgrösse die Lagererneuerungsgrenze Y erreicht oder unterschreitet.

Für die Höhe der Lageraufträge besteht die Forderung, dass die Auftragsgrösse grösser oder gleich der Mindestlosgrösse X sein soll. Ferner sollen die Mengen, um die die Dispositionsgrösse die Lagererneuerungsgrenze Y unterschreitet, jeweils bei der Ausstellung der Lageraufträge berücksichtigt werden. So formulieren wir als 4. Bedingung der Organisation: ein Lagerauftrag setzt sich zusammen aus der Mindestlosgrösse X und der Menge, um die die Dispositions-

grösse die Lagererneuerungsgrenze Y unterschreitet. Ist im Grenzfall die Dispositionsgrösse gleich der Lagererneuerungsgrenze, also die Unterschreitung der Lagererneuerungsgrenze durch die Dispositionsgrösse gleich Null, so ist der Lagerauftrag gleich der Mindestlosgrösse.

Man nimmt zur Mindestlosgrösse die Menge, um die die Lagererneuerungsgrenze durch die Dispositionsgrösse unterschritten wird, deshalb hinzu, weil durch diese Strategie hohe Auftragsgrössen erreicht werden. Bei der späteren Betrachtung der Kosten bedingen hohe Auftragsgrössen eine Degression der verhältnismässig hohen Umstellkosten je produzierter Einheit.

Die Lageraufträge gehen zur Produktion, wo die Auftragsmengen hergestellt werden und nach einer Produktionsdauer T ⁸ als Lagereingang der Auffüllung des Lagers dienen.

Zu den Bedingungen der Organisation sei ein Beispiel gegeben⁹, und zwar vom Zeitpunkt der Erteilung eines Lagerauftrags an bis zum Zeitpunkt, an dem die auf Grund des Auftrags in der Produktion hergestellte Menge zum Lagereingang wird.

Es sei: die Mindestlosgrösse $X = 4$

die Lagererneuerungsgrenze $Y = 3$

die Produktionsdauer $T = 3$;

ferner sei für den Tag t :

z_t die Tagesbestellmenge am Tag t

P_t die Dispositionsgrösse

E_t die Lagergrösse

A_t der Lagerauftrag

A_{t-T} der Lagereingang

Die Symbolik A_{t-T} für den Lagereingang erklärt sich aus der konstanten zeitlichen Beziehung zwischen Lagerauftrag und Lagereingang. Ein Lagerauftrag, der am Tag t entsteht, wird nach T Tagen zum Lagereingang. So ist der Lagereingang des Tages t gleich dem Lagerauftrag vom Tag $t-T$, A_{t-T} .

⁸ Die Produktionsdauer kann in dieser Arbeit als konstant T angesehen werden; vgl. S. 16

⁹ Vgl. Übersicht der in der Arbeit verwendeten Symbole. S. 87

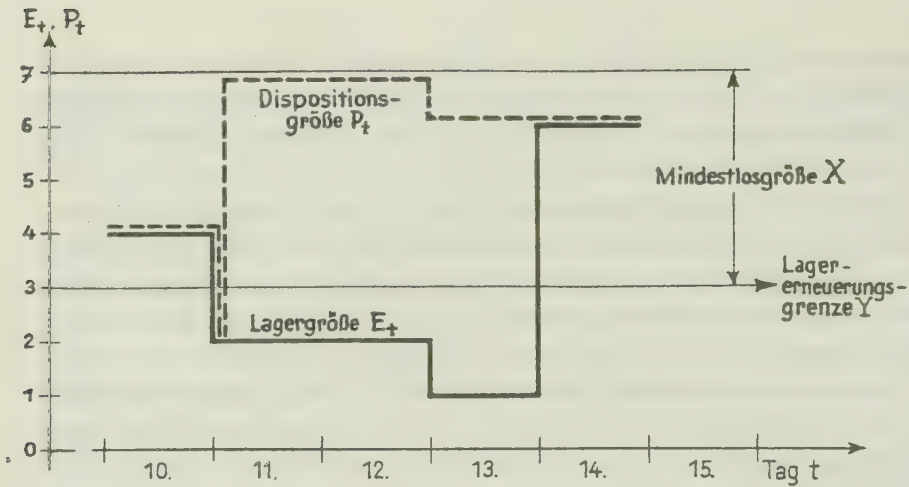


Abbildung 1: Kurven der Lager- und der Dispositionsgrösse

Am 10. Tag seien

$$P_{10} = 4; \quad E_{10} = 4$$

Die Tagesbestellmenge am 11. Tag z_{11} vermindert die Lager- und die Dispositionsgrösse vom Vortag:

$$P_{11}^* = P_{10} - z_{11} = 4 - 2 = 2^{10}$$

$$E_{11} = E_{10} - z_{11} = 4 - 2 = 2$$

Da $P_{11}^* \leq Y$, ist ein Lagerauftrag auszustellen:

$$A_{11} = X + Y - P_{11}^* = 4 + 3 - 2 = 5$$

Der Lagerauftrag erhöht die erwarteten Lagereingänge und so ergibt sich als Dispositionsgrösse für den 11. Tag:

$$P_{11} = P_{11}^* + A_{11} = 2 + 5 = 7$$

Der 12. Tag ist ohne Bestelleingang und so ergeben sich keine Veränderungen der Dispositions- und Lagergrösse:

$$P_{12} = P_{11} = 7$$

$$E_{12} = E_{11} = 2$$

Am 13. Tag ist die Tagesbestellmenge $z_{13} = 1$; Dispositions- und Lagergrösse sind zu vermindern:

¹⁰ Wir versehen die Dispositionsgrösse P_{11}^* mit einem Stern, weil dieser Wert für den 11. Tag noch nicht endgültig ist und nochmals eine Änderung erfährt.

$$P_{13} = P_{12} - z_{13} = 7 - 1 = 6$$

$$E_{13} = E_{12} - z_{13} = 2 - 1 = 1$$

Der 14. Tag ist ohne Bestelleingang, jedoch mit Lagereingang, da der Lagerauftrag vom Tage 11 nach $T = 3$ Tagen Produktionsdauer fertiggestellt ist. Die Dispositionsgrösse bleibt unverändert:

$$P_{14} = P_{13} = 7$$

und die Lagergrösse wird durch den Lagereingang erhöht:

$$E_{14} = E_{13} + A_{14-3} = E_{13} + A_{11} = 1 + 5 = 6$$

Am 14. Tag wird der Lagerauftrag zum Lagereingang. So zeigt das Beispiel, wie sich ein Lagerauftrag bildet, wie er zum Lagereingang wird und welche Bedeutung dabei die Bedingungen der Organisation haben.

23 BEDINGUNGEN DER PRODUKTION

Zum Fragenbereich der Produktion zählen Probleme der Rohstoffversorgung, der Produktionskapazität, der Kosten der Produktion und der Dauer der Produktion. Für sie sind die in dem zu untersuchenden Betrieb geltenden Bedingungen aufzuführen. Zum Teil sind diese Bedingungen von der Betriebsführung vorgegeben.

Rohstoffe stehen für alle Produkte jederzeit in beliebigen Mengen zur Verfügung; dabei kann die Zulieferung der Rohstoffe so gesteuert werden, dass, abgesehen von kleinen Pufferlagern, die vernachlässigt werden können, keine Lagerhaltung entsteht und so auch keine Lagerkosten für Rohstoffe zu berücksichtigen sind. So gelten als Bedingungen:

1. Für die Zulieferung der Rohstoffe liegt keine Kapazitätsbeschränkung vor.
2. Die Lagerhaltung für Rohstoffe kann vernachlässigt werden.

Die in der Fertigung zur Verfügung stehende Produktionskapazität¹¹ setzt sich aus den Kapazitäten mehrerer Maschinen zusammen. Sie dient der Produktion von 2 Produktgruppen. Die Produktgruppe 1, das sind die von uns zu untersuchenden Produkte, hat die Dringlichkeit I; die Gruppe 2 die Dringlichkeit II,

¹¹ Die Produktionskapazität wird in Leistungszeiten gemessen. Vgl. HEINEN, E., a. a. O., S. 124

d. h., dass ein Produkt der Gruppe 1 bei der Fertigung immer den Vorrang vor einem Produkt der Gruppe 2 hat.

Bei den Überlegungen zur Höhe der Kapazitätsbeanspruchung der Gruppe 1 müssen wir fragen: wie ist die Kapazitätsbeanspruchung

- a) durch einen Auftrag,
- b) durch die Aufträge eines Produktes der Gruppe 1,
- c) durch die Aufträge aller Produkte der Gruppe 1?

Wir führen die Überlegungen zuerst für eine Maschine durch und gehen dann auf den Fall mehrerer Maschinen über.

ad a) Bei einem Auftrag setzt sich die Kapazitätsbeanspruchung zusammen aus einer Umstellzeit U und einer Ausführungszeit des Auftrages F .¹²

ad b) Die Kapazitätsbeanspruchung eines Produktes der Gruppe 1 setzt sich aus den in gewissen Zeitabständen durch die Aufträge beanspruchten Zeiten U und F zusammen. Dabei sind alle Umstellzeiten U konstant; die Fertigungszeiten sind dagegen variabel und der Auftragsgrösse proportional.

Zur Kennzeichnung der einzelnen Zeiten der Kapazitätsbeanspruchung versehen wir U und F mit den Indizes k und l . Es gibt k die Nummer des Produktes der Gruppe 1 an, sie sei z. B. 5; l ist der Index, der alle Aufträge des gleichen Produktes fortlaufend numeriert.

Als graphische Darstellung ergibt sich für die Kapazitätsbeanspruchung der Aufträge eines Produktes der Gruppe 1 für 1 Maschine folgendes Bild:



Abbildung 2: Kapazitätsbeanspruchung auf einer Maschine durch die Aufträge eines Produktes der Gruppe 1

ad c) Bei der Kapazitätsbeanspruchung durch die Aufträge aller Produkte der Gruppe 1 sind alle Umstellzeiten U_{kl} und Fertigungszeiten F_{kl} zu berücksichtigen, wobei nun neben dem Index l auch der Index k zur Kennzeichnung der ver-

¹² Nach Refa ergibt sich die Auftragszeit aus der Rüstzeit und der Ausführungszeit. Dabei entspricht hier die Rüstzeit der Umstellzeit. Vgl. Das Refa-Buch, Band 2, Zeitvorgabe, München 1957, S. 11

schiedenen Produkte variabel ist. Es gilt so, wie für jedes einzelne Produkt, auch von Produkt zu Produkt, dass die Umstellzeiten U_{kl} gleich und die Fertigungszeiten F_{kl} proportional der Auftragsgrösse sind. Die Kapazitätsbeanspruchung für 1 Maschine setzt sich für alle Aufträge aller Produkte der Gruppe 1 zusammen aus der Summe der Umstellzeiten U_{kl} und der Summe der Fertigungszeiten F_{kl} . Als Formel für die Kapazitätsbeanspruchung gilt:

$$\sum_k \sum_l U_{kl} + \sum_k \sum_l F_{kl}$$

Die graphische Darstellung für diesen Zusammenhang:

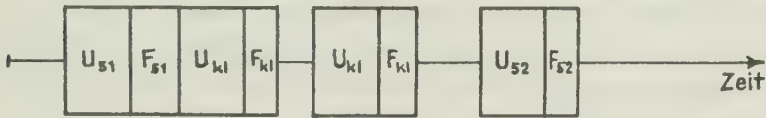


Abbildung 3: Kapazitätsbeanspruchung auf einer Maschine durch die Aufträge aller Produkte der Gruppe 1

Kapazität, die durch Produkte der Gruppe 1 nicht in Anspruch genommen wird, dient der Fertigung von Produkten der Gruppe 2; wir bezeichnen sie in der graphischen Darstellung mit G 2.

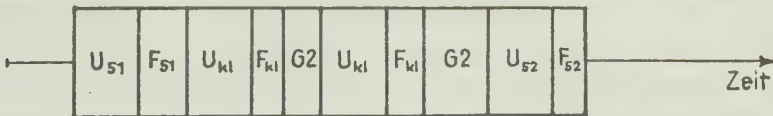


Abbildung 4: Kapazitätsbeanspruchung auf einer Maschine durch Produkte der Gruppen 1 und 2

So haben wir für die Produktgruppen 1 und 2 die Kapazitätsbeanspruchung bei einer Maschine beschrieben. Diese Überlegungen gelten in gleicher Weise auch für alle übrigen Maschinen.

Für den zu untersuchenden Betrieb kann gesagt werden, dass bei wirtschaftlicher Fertigungsweise die Spitzenkapazitätsbeanspruchung aller Maschinen durch Produkte der Gruppe 1 in keinem Zeitpunkt das Maximum der zur Verfügung

stehenden Gesamtkapazität erreicht. Das heisst aber, es entfällt die Notwendigkeit, Überlegungen über die Anschaffung neuer Maschinen (Kapazitätserweiterungen) anzustellen. Auch das Problem der Leerkapazität ist hier nicht zu berücksichtigen, da durch Produkte der Gruppe 1 nicht in Anspruch genommene Kapazität immer durch Produkte der Gruppe 2 belegt wird. So verteilen sich alle Kosten der Kapazität auf die Produktgruppen 1 und 2; Kosten für freistehende Kapazität entstehen nicht.

Die Kosten der Produktionskapazität, das sind vor allem die Abschreibungen und Kosten für Wartung der Maschinen, werden auf die Stunden der Kapazitätsbeanspruchung verrechnet. Der Kostensatz für jede Stunde ist konstant.

So gilt als 3. Bedingung der Produktion: wir haben für die zu untersuchenden Produkte der Gruppe 1 einen Fall beliebig möglicher Kapazitätsbeanspruchung bei konstanten Kosten je Zeiteinheit, d.h. wir können jederzeit die Kapazitätsbeanspruchung der Gruppe 1 vermehren oder vermindern, wobei der Kostensatz je Stunde konstant bleibt.

Die Überlegungen zu den Kosten der Produktionskapazität bilden eine Grundlage für die folgende Bestimmung der Kosten der Produktion.

Bei der Produktion eines Loses ist zuerst eine Umstellung der Produktionsanlagen auf das neue Produkt notwendig. Die Umstellung nimmt immer die gleiche Zeit¹³ und den gleichen Arbeitsaufwand in Anspruch, d.h. die Kosten für eine Umstellung sind immer konstant und wir bezeichnen sie als losfixe Kosten. Die losfixen Kosten sind durch den berechenbaren Umstellkostensatz α gegeben.

Neben den losfixen Kosten entstehen bei der Produktion Kosten, die je produzierter Einheit konstant β sind, also proportional mit der Losgrösse steigen; wir nennen sie deshalb auch losproportionale Kosten. Zu ihnen gehören die Materialkosten, die Kosten der in Anspruch genommenen Kapazität während der Ausführungszeit und die Kosten für Ein- und Auslagerung der Produkte, die wegen ihres proportionalen Verlaufes mit der produzierten Menge zu den losproportionalen Kosten hinzugenommen werden. Die losproportionalen Kosten eines Loses ergeben sich durch Multiplikation der Losgrösse (x) mit dem berechenbaren losproportionalen Kostensatz je Einheit β .

¹³ Kapazitätsbeanspruchung je Umstellung ist damit konstant.

Die nun folgende Berechnung der Gesamtkosten eines Loses und eines Zeitraumes ergibt die 4. Bedingung der Produktion.

Die Gesamtkosten eines Loses (y) erhalten wir als Summe der Umstellkosten α und der losproportionalen Kosten βx . Graphisch sind sie als Gerade

$$y = \alpha + \beta x$$

darzustellen.

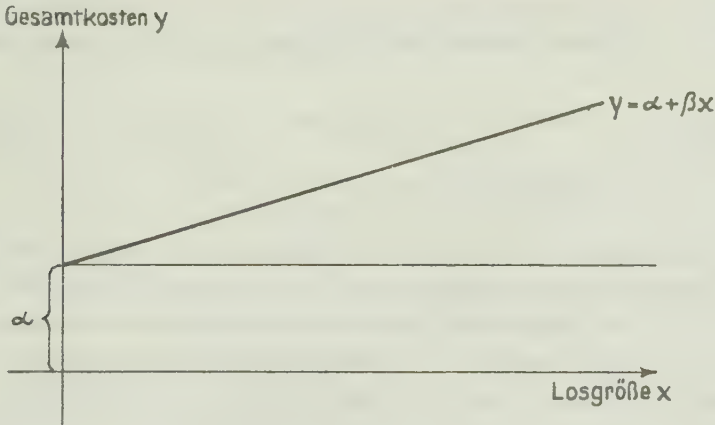


Abbildung 5: Gesamtkostenkurve eines Loses

Fragen wir nach den Gesamtkosten der Produktion in einem Zeitraum, so ergeben sie sich

für ein Produkt der Gruppe 1: als Summe der Gesamtkosten der einzelnen Lose dieses Produktes;

für alle Produkte der Gruppe 1: als Summe der Gesamtkosten aller gefertigten Lose.

Die letzte Bedingung der Produktion betrifft die Produktionsdauer. Sie setzt sich zusammen aus der Auftragszeit und der Zeit, die ein Auftrag nach seiner unmittelbaren Fertigstellung in der Produktion bis zu seiner Auslieferung an einen Kunden bzw. für die Einlagerung benötigt. Der grösste Teil der Produktionsdauer ist durch die konstante Umstellzeit bedingt. Die variable Ausführungszeit und Zeit der Auslieferung an einen Kunden bzw. der Einlagerung sind im Verhältnis zur gesamten Produktionsdauer gering und so kann diese als

5. Bedingung der Produktion als konstant T angenommen werden.

24 BEDINGUNGEN FÜR DEN ABSATZ

Die im folgenden für ein Produkt dargestellten Absatzbedingungen sind für alle Produkte gleich.

Die 1. Absatzbedingung wurde bereits bei den Ausführungen zur Mindestlosgrösse erwähnt. Sie betrifft die möglichen Wege der Belieferung von Tagesbestellmengen. Sie sind:

- a) Lieferung nach und ab Produktion, ohne Umweg über das Lager (Grossbestellmengen), oder
- b) Lieferung ab Lager (Kleinbestellmengen).

Bei den Lieferfristen unterscheiden wir Fristen gegenüber den Kunden und Fristen, die betriebsintern festgelegt werden. Die Betriebsführung will die Möglichkeit eines Lieferungsverzugs gegenüber den Kunden ausschliessen und hat deshalb als 2. Absatzbedingung die Produktionsdauer T als Lieferfrist gegenüber den Kunden festgelegt. Da immer genügend Produktionskapazität für die Fertigung von Produkten der Gruppe 1 zur Verfügung steht, d. h. jeder Auftrag sofort gefertigt werden kann, ist ein Lieferungsverzug gegenüber den Kunden nicht möglich.

Für die Belieferung von Tagesbestellmengen ab Lager ist der Wunsch der Betriebsführung, dass die Lieferung sofort nach Bestelleingang erfolgt. Kann dies nicht geschehen, so entsteht ein Lieferungsverzug, der kein Lieferungsverzug des Betriebes gegenüber einem Kunden ist; er wird jedoch vom Betrieb als Lieferungsverzug registriert, weil eine von der Betriebsführung intern gesetzte Frist nicht eingehalten wird. Dieser Lieferungsverzug, den wir als betriebsinternen Lieferungsverzug bezeichnen, wird im Modell wie ein Lieferungsverzug gegenüber einem Kunden betrachtet, d. h. man behandelt ihn wie eine kostenverursachende Grösse. Die 3. Absatzbedingung setzt also eine betriebsinterne Lieferfrist für Lieferungen ab Lager mit null Tagen fest.

Als weitere Absatzbedingung sind hier noch Gesetzmässigkeiten der Nachfragerreihen zu nennen. Da sie aber einen eigenen Problemkreis darstellen, auf den ausführlich einzugehen ist, werden sie in Abschnitt 3 behandelt.

25 BEDINGUNGEN DER LAGERHALTUNG

In diesem Abschnitt werden die Frage der Lagerkapazität und die Bedingungen für die Ermittlung der Kosten im Lagerhaltungsbereich dargestellt.

Für die Lagerung aller Produkte stehen betriebliche Lagerkapazitäten¹⁴ zur Verfügung; reichen diese nicht aus, so können sie durch Fremdlager beliebig erweitert werden. So ist die 1. Bedingung der Lagerhaltung: Lagerkapazität ist unbeschränkt verfügbar, d.h. die Lagergrösse pro Zeiteinheit darf beliebig gross sein.

Die Ermittlung der Kosten im Lagerhaltungsbereich ist für alle Produkte gleich und wird hier für 1 Produkt dargestellt. Es sind dazu 2 Begriffe zu definieren: Zeitmengenbestand und Zeitmengendefizit der Lagergrösse. Die Begriffe sind nicht auf eine bestimmte Zeiteinheit bezogen, wie z.B. die Lager- und die Dispositionsgrösse, sondern machen eine Aussage über Menge und Zeit zugleich, d.h. sie erfassen die Lagergrösse in einem Zeitraum.

Der Zeitmengenbestand ist die Summe der Lagerbestände der Zeiteinheiten eines Zeitraumes. Das Zeitmengendefizit ist die Summe der Absolutwerte der Lagerdefizite der Zeiteinheiten in einem Zeitraum. Es werden hier deshalb Absolutbeträge genommen, weil das Zeitmengendefizit eine positive Grösse sein soll.

Dazu ein Beispiel. Haben wir in einem Zeitraum als Werte der Lagergrösse:

Tag	Lagergrösse
1	4
2	- 2
3	- 3
4	7
5	1

so ergeben sich:

a) der Zeitmengenbestand:

$$4 + 7 + 1 = 12$$

b) das Zeitmengendefizit:

$$|-2| + |-3| = 5$$

¹⁴ Sie werden in "verfügbaren Räumen", in m³ gemessen. Vgl. HEINEN, E., a. a. O., S. 124.

Zeitmengenbestand und Zeitmengendefizit bilden zusammen mit den entsprechenden Kostensätzen die Grundlage für die Berechnung der Kosten der Lagerhaltung.

Lagerbestände in den Lagern des Betriebs verursachen Kosten durch Kapitalbindung (Zinskosten) und durch die Inanspruchnahme von Lagerraum (Abschreibungen und Personalkosten). Die Kosten für Lagerbestände laufen proportional dem Zeitmengenbestand und so eignet sich dieser gut für die Verrechnung der Kosten von Lagerbeständen. Da wir den Zeitmengenbestand in Tag und Kilogramm messen, beziehen wir auch den Kostensatz des Zeitmengenbestandes γ auf einen Tag und ein Kilo. Kosten der Ein- und Auslagerung sind darin nicht enthalten; sie werden, da sie proportional zur produzierten Menge verlaufen, in den losproportionalen Fertigungskosten verrechnet.

Die Kosten für Lagerbestände in Fremdlagern werden von den Lagerhäusern ebenfalls proportional zum Zeitmengenbestand berechnet. Da sich die Kosten für Lager im Betrieb und für Fremdlager nur sehr gering unterscheiden, wird für die Kostenermittlung im Modell nur 1 Kostensatz berücksichtigt. Man hat sich hier für den Kostensatz γ für Lagerbestände im Betrieb entschieden.

Der Kostensatz des Zeitmengendefizits δ hat ebenso wie der des Zeitmengenbestandes als Bezugsbasis die Mengenzeiteinheit Tag und kg. Er ist nicht auf Grund von praktischen Unterlagen ermittelt, sondern wird von der Betriebsführung festgelegt und ist so ein theoretischer Wert, der der Steuerung des Umfangs des Zeitmengendefizits dient. Je höher der Kostensatz δ festgelegt wird, um so geringer wird in der später zu bestimmenden optimalen Kombination von Mindestlosgröße und Lagererneuerungsgrenze das Zeitmengendefizit sein. Eine spezielle Untersuchung des Zusammenhanges zwischen der Höhe von δ und dem Umfang des Zeitmengendefizits wird in dieser Arbeit nicht durchgeführt.

Wir können als 2. Bedingung der Lagerhaltung feststellen: die Kosten des Lagerhaltungsbereiches setzen sich für einen Zeitraum zusammen aus den Kosten des Zeitmengenbestandes und des Zeitmengendefizits; dabei ergeben sich die Kosten des Zeitmengenbestandes aus dem Produkt des Zeitmengenbestandes eines Zeitraums und dem Kostensatz γ , und die Kosten des Zeitmengendefizits aus dem Produkt des Zeitmengendefizits eines Zeitraums und dem Kostensatz δ .

Damit sind auch die Bedingungen der Lagerhaltung erfasst und es ist nun noch für die Bereiche Produktion, Absatz, Lagerhaltung und Organisation zu prüfen, ob in ihnen die Produkte als voneinander unabhängig anzusehen sind.

26 DIE FRAGE DER UNABHÄNGIGKEIT DER PRODUKTE

Wir beginnen mit der Untersuchung im Absatzbereich. Es besteht hier die Frage, ob die Reihen der Tagesbestellmengen für verschiedene Produkte sich untereinander beeinflussen, z. B. so, dass bei steigender Zahl der Bestelltage und steigenden Tagesbestellmengen grösser Null beim Produkt A die Zahl der Bestelltage und die Tagesbestellmengen grösser Null beim Produkt B abnehmen. Eine Untersuchung dieser Frage kann aus Kostengründen für das umfangreiche Material von 251 Produkten nicht durchgeführt werden. Jedoch sprechen im Betrieb gesammelte Erfahrungen dafür, dass die Produkte voneinander unabhängig sind.

In der Produktion tritt zeitlich zuerst das Problem der Rohstoffversorgung auf. Es wurde hier für den untersuchten Betrieb festgestellt, dass die Rohstoffe jederzeit in beliebigen Mengen zur Verfügung stehen. Damit hat die Rohstoffversorgung eines Produktes auf die übrigen Produkte keinen Einfluss; die Unabhängigkeitsbedingung ist für die Rohstoffversorgung gegeben.

Auch bei den Produktionsverfahren kann angenommen werden, dass die Produktion eines Produktes keinen Einfluss auf die Produktion der übrigen Produkte hat. Ein Einfluss wäre z. B. gegeben, wenn die Produktion des Produktes A auf einer Maschine eine anschliessende Produktion des Produktes B unmöglich oder nur unter erhöhten Kosten möglich machen würde. Ein derartiger Zusammenhang besteht zwischen den Produktionsverfahren der von uns zu untersuchenden Produkte nicht. Wir können sagen, dass das Produktionsverfahren jedes Produktes unabhängig ist von den Produktionsverfahren der übrigen Produkte.

Als Bedingung für die Produktionskapazität haben wir festgestellt, dass sie jederzeit in beliebigem Umfang für die Fertigung jedes Produktes der Gruppe 1 zur Verfügung steht. Es kann so für jedes dieser Produkte gesagt werden, dass es durch Inanspruchnahme der Produktionskapazität keinen Einfluss auf die Produktionsweise und -möglichkeit eines anderen Produktes ausübt, d. h. für alle Produkte der Gruppe 1 untereinander ist die Unabhängigkeitsbedingung auch durch die Produktionskapazität gegeben.

Je nachdem, ob der Kapazitätsbedarf für die Produkte der Gruppe 1 zu- oder abnimmt, sinkt oder steigt die verbleibende Kapazität für die Produktion für Gruppe 2. Somit ist die Produktionskapazität und damit auch die Produktion

der Produkte der Gruppe 2 abhängig von der Produktion von Produkten der Gruppe 1. Umgekehrt besteht jedoch durch die Produktionskapazität eine Abhängigkeit der Produktion für Gruppe 1 von der Produktion für Gruppe 2 nicht, da die Produktion von Gruppe 1 bei der Inanspruchnahme von Produktionskapazität die Dringlichkeit I besitzt.

Das folgende Beispiel soll zeigen, wie durch eine Beschränkung der Produktionskapazität die Produkte der Gruppe 1 voneinander in Abhängigkeit geraten würden. Nehmen wir an, die Kapazität sei soweit ausgelastet, dass nur noch einer von zwei Aufträge der Produkte A und B der Gruppe 1 gefertigt werden kann. Es zeigt sich hier deutlich die Abhängigkeit der Produkte bei der Frage: Soll nur Produkt A oder Produkt B oder von jedem ein Teil des Auftrags gefertigt werden?

Ebenso wie die Produktionskapazität bei der Produktion so steht im Bereich der Lagerhaltung die Lagerkapazität unbeschränkt zur Verfügung. Damit ist auch für die Lagerhaltung die Unabhängigkeitsbedingung gegeben; die Lagerhaltung eines Produkts hat keinen Einfluss auf die Lagerhaltung der übrigen Produkte.

Auch durch die Bedingungen der Organisation besteht keine Abhängigkeit zwischen den Produkten. Eine Abhängigkeit durch die organisatorischen Grundsätze wäre z. B. mit der Bedingung eingeführt worden, dass nach dem Produkt A immer das Produkt B der Gruppe 1 zu fertigen ist. Unsere organisatorischen Grundsätze sind aber nur abhängig von Grössen, die immer dem gleichen Produkt zugeordnet sind, wie z. B. den Tagesbestellmengen, der Mindestlosgrösse und der Lagererneuerungsgrenze - nicht aber von Grössen anderer Produkte.

Aus der Untersuchung der Bereiche Absatz, Produktion, Lagerhaltung und Organisation ergibt sich als Bedingung: Die Produkte der Gruppe 1 sind voneinander unabhängig. Das heisst aber: Wir dürfen bei den weiteren Überlegungen für jedes Produkt einzeln die Frage der Bestimmung von optimaler Mindestlosgrösse und Lagererneuerungsgrenze behandeln. Das bedeutet weiterhin: Haben wir das Prinzip der Lösung für eines der Produkte dargestellt, so ist dies gleichzeitig die Lösung für die übrigen Produkte.

Im Anhang zu Abschnitt 2 werden die betrieblichen Bedingungen kurz zusammengefasst.

ANHANG: Zusammenstellung der betrieblichen Bedingungen

Wir können die Bedingungen für unser Modell in folgender Übersicht zusammenstellen.

- a) Die organisatorischen Grundsätze:
 - aa) bei der Erfassung der Nachfragereihen sind die Tagesbestellmengen Untersuchungsmerkmal;
 - ab) die Fertigung erfolgt in Losen; dabei soll eine Mindestlosgrösse beachtet werden;
 - ac) bei der Lagerdisposition ist eine Lagererneuerungsgrenze zu beachten;
- b) Die Kapazitätsbedingungen:

Rohstoff-, Produktions- und Lagerkapazität sind unbeschränkt verfügbar.
- c) Die Fristen:
 - ca) alle Einzelbestellmengen haben eine Lieferfrist gegenüber den Kunden von T Tagen;
 - cb) für Lieferungen ab Lager besteht eine betriebsinterne Lieferfrist von null Tagen;
 - cc) die Produktionsdauer T ist unabhängig von der Auftragsgrösse konstant T.
- d) Die kostenverursachenden Grössen sind:
 - da) die Produktionsumstellungen bei Sortenwechsel;
 - db) die Produktionsmengen selbst;¹⁵
 - dc) Lagerbestände;
 - dd) Lagerdefizite.

¹⁵ Eine Berücksichtigung der Produktionsmengen als kostenverursachende Grösse erweist sich in den folgenden Ausführungen als nicht notwendig, vgl. S. 68

- e) Unabhängigkeit der Produkte wurde festgestellt für die betrieblichen Bereiche:
 - ea) Organisation;
 - eb) Absatz;
 - ec) Produktion einschliesslich Rohstoffversorgung;
 - ed) Lagerhaltung.

3 ERFASSUNG DER NACHFRAGE

31 ZUR EINFÜHRUNG

Weitere betriebliche Bedingungen erhalten wir bei der Untersuchung der Nachfragereihen auf bestehende Gesetzmässigkeiten. Es sei hier vorweg erwähnt, dass die meisten der für den Betrieb erfassten Reihen von Tagesbestellmengen einen besonderen Reihentyp darstellen. Bei der analytischen Untersuchung von 251 Reihen verschiedener Produkte mit statistischen Prüfmethoden konnte bei 232 Produkten die Annahme einer Zufallsverteilung als vertretbar angesehen werden. Ferner zeigte sich bei 219 der 232 Produkte, dass die Vermutung bestimmter Verteilungsgesetze aufrechterhalten werden konnte. Im folgenden wird dargestellt, wie für die 219 Produkte bei einer analytischen Untersuchung die Prüfung auf Zufälligkeit durchgeführt werden kann. Die übrigen 32 der 251 Produkte gehören der Gruppe von Reihen mit systematischen Reihenbewegungen an, deren Untersuchung einen eigenen, sehr umfangreichen Problemkreis darstellt, der hier nicht zu behandeln ist.

32 ZUM VERFAHREN DER NACHFRAGEERFASSUNG

321 Die Nachfragereihe

Als Beispiel sei in Tabelle 1 und Abbildung 6 für ein Produkt eine Reihe von Tagesbestellmengen angenommen, die dem bei der praktischen Untersuchung vorgefundenen Reihentyp entspricht. Es werden nur die Werte der Werktage Montag bis Freitag berücksichtigt; Feiertage, die auf einen der Tage Montag bis Freitag fallen, werden als Nichtbestelltage betrachtet.

Tabelle 1: Angenommene Reihe der Tagesbestellmengen eines bestimmten Produktes (Vgl. hierzu auch Abbildung 6)

Woche	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag
1	0	0	300	0	0
2	2 500	0	0	0	0
3	0	0	0	1 350	300
4	300	0	3	2 331	0
5	400	2 692	0	0	0
6	0	0	0	0	0
7	25	0	250	0	0
8	0	0	300	0	0
9	0	0	0	0	300
10	1 525	200	0	0	0
11	0	0	1 500	0	1 250
12	0	500	2 000	50	0
13	0	0	550	0	0
14	0	0	0	0	0
15	0	150	91	0	0
16	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0
18	0	0	2	0	0
19	0	3 100	2 750	200	4 500
20	0	0	0	0	0
21	1 500	575	25	0	0
22	0	0	0	10	0
23	0	1 125	0	0	0
24	0	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0
26	2 500	0	0	0	0
27	6 650	0	0	0	0
28	100	975	1 000	0	0
29	5	2 100	0	0	0
30	0	0	0	0	0

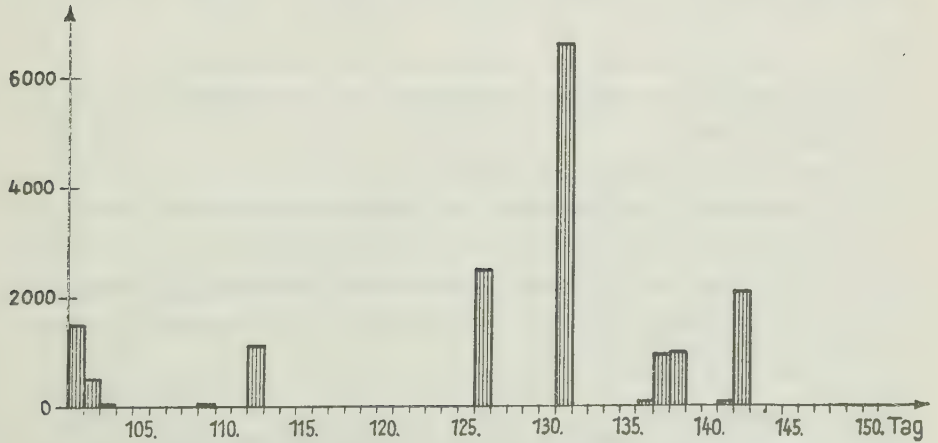
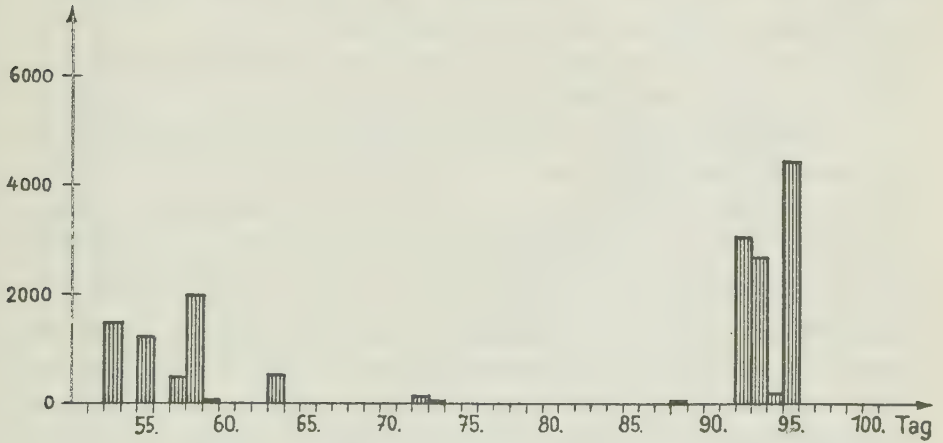
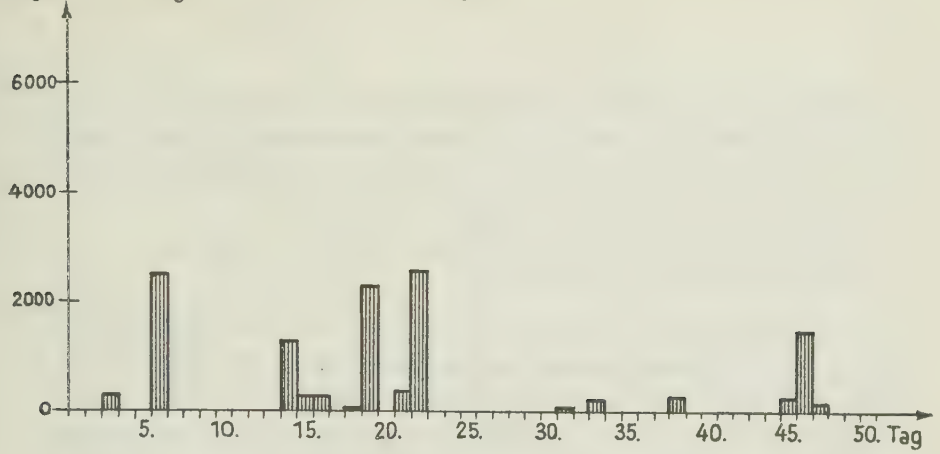


Abbildung 6: Angenommene Reihe von Tagesbestellmengen eines bestimmten Produktes (vgl. Tabelle 1)

Aus Abbildung 6 ist zu ersehen, dass die Folge der Bestelltage und Nichtbestelltage sowie die Höhe der Tagesbestellmengen unregelmässig angeordnet sind. Es besteht die Aufgabe, ein Verfahren der Nachfrageerfassung aufzufinden, das für den speziellen Typ unserer Reihe geeignet ist.

322 Zur Erfassung der Nachfragereihe

"In der Konjunkturforschung wird die Annahme gemacht, dass eine Zeitreihe sich aus 4 Bewegungskomponenten zusammensetzt, die man folgendermassen definiert:

a) der Trend, d.i. die allgemeine Entwicklungstendenz in langen Zeitabschnitten, gibt den Hauptverlauf der Zeitreihe wieder;

b) die zyklischen Schwankungen: diese sind wellenförmige Bewegungen, die dem Trend überlagert sind;

c) die Saisonschwankungen, welche jährlich in den gleichen Zeitpunkten wiederkehrende Bewegungen sind;

d) die irregulären Schwankungen: diese bestehen hauptsächlich aus kleineren, in der Reihe oft auftretenden Schwankungen, die Zufallscharakter haben." ¹⁶

Bei den gebräuchlichen Methoden der Nachfrageerfassung in der Konjunkturforschung geht man davon aus, dass mindestens eine der regelmässig verlaufenden Komponenten a bis c in einer Nachfragereihe enthalten sind und dass die irreguläre Komponente einen verhältnismässig schwachen Einfluss hat. Die irreguläre Komponente "schaltet man aus", z.B. durch die häufig verwendete Methode der gleitenden Durchschnitte.

Es gibt aber auch Nachfragereihen, für deren Komponenten gilt:

a) die regelmässig verlaufenden Komponenten sind sehr schwach oder gar nicht ausgebildet, und

b) die irreguläre zufällige Komponente ist sehr stark ausgeprägt und beherrscht das Bild der Reihe. Zu dieser Art von Reihen gehört auch der von uns zu untersuchende Reihentyp. Es ist hier nicht möglich, für die Nachfrageerfassung, die in der Konjunkturforschung gebräuchlichen Methoden anzuwenden; sie würden den speziellen Gegebenheiten einer Reihe mit überwiegender Zufallskomponente nicht gerecht werden.

¹⁶ WALD, A.: Berechnung und Ausschaltung von Saisonschwankungen, Wien 1936, S. 1

Da in der Literatur ein für unseren Spezialfall geeignetes Verfahren der Nachfrageerfassung nicht aufzufinden war, wird in den folgenden Abschnitten versucht, ein solches abzuleiten.

33 PRÜFUNG EINER NACHFRAGEREIHEN AUF ZUFALLSVERTEILUNG

331 Zum Prüfverfahren

SLUTZKY¹⁷ schreibt zu den Eigenschaften einer zufallsverteilten Reihe, dass die Werte der Glieder in ihrer Folge nicht voneinander abhängig, d.h. nicht autokorreliert sind. Es ist dies eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung. Bei einer zufallsverteilten Reihe muss diese Bedingung erfüllt sein. aber nachgewiesen werden kann eine Zufallsverteilung damit nicht. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für Zufallsverteilung gibt es nicht, d.h. es ist nicht möglich, eine Zufallsverteilung zu beweisen. Wir können bei der Prüfung von Reihen auf Zufälligkeit nur notwendige Bedingungen stellen und mit geeigneten Prüfverfahren feststellen, ob in den Reihen die Bedingungen erfüllt sind oder nicht. Sind die Bedingungen nicht erfüllt, wird eine Zufallsverteilung abgelehnt; sind sie erfüllt, wird Zufallsverteilung angenommen.

Wie unter 332 und 333 gezeigt wird, können sich Reihen aus systematischen und zufälligen Komponenten zusammensetzen. Die Reihen werden nur dann als zufallsverteilt angesehen, wenn der Einfluss der Zufallskomponente so stark ist, dass der Einfluss der systematischen Komponente nicht mehr zu erkennen ist, d.h. gesichert nachgewiesen werden kann.

Für nicht zufallsverteilte Reihen besteht die Vermutung, dass sie eine systematische Bewegungskomponente, einen Trend, eine Saison oder eine zyklische Bewegungskomponente besitzen; das würde bedeuten, dass die einzelnen Werte der Reihe autokorreliert sind. So erscheint die Prüfung der Reihen auf die Bedingung der Autokorrelation als am wirksamsten für die Prüfung auf Zufälligkeit.

Bei der Prüfung einer Reihe x_i ($i=1, \dots, n$) auf Autokorrelation bilden wir durch eine Verschiebung der Reihe um j Werte eine Reihe x_{i+j} ($i=1, \dots, n-j$), die wir

¹⁷ SLUTZKY, E.: The Summation of Random Causes and the Source of Cyclic Process, *Econometrica*, Vol. 5, 1937, S. 107/108

der Reihe x_i ($i=1, \dots, n-j$) gegenüberstellen. ANDERSON¹⁸ leitet für den plausibelsten Wert des Autokorrelationskoeffizienten R folgende Formel ab:

$$(1) \quad R = \frac{n-1}{n-j} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n-j} (x_i - \bar{x})(x_{i+j} - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} + \frac{1}{n}$$

Dabei ist für die x_i -Werte kein Verteilungsgesetz vorausgesetzt und wir haben so einen nicht parametrischen Autokorrelationskoeffizienten. Sein Erwartungswert ist:

$$ER = 0.$$

Bei der Prüfung des Autokorrelationskoeffizienten auf die Nullhypothese gilt für die Varianz:

$$(2) \quad \text{Var } R \approx \frac{1}{n-j}$$

Wir erhalten das t zur Berechnung der Sicherheit des Autokorrelationskoeffizienten aus

$$(3) \quad t = \frac{R}{\sqrt{\text{Var } R}}$$

Zur Prüfung unserer Nachfragereihe wollen wir festlegen, dass bei $|t| > 3$ eine Autokorrelation als gesichert nachgewiesen angesehen werden kann. Das bedeutet, dass:

- a) alle Autokorrelationskoeffizienten kleiner $0 - 3 \sqrt{\text{Var } R}$ und grösser $0 + 3 \sqrt{\text{Var } R}$ für eine Autokorrelation und gegen eine Zufallsverteilung sprechen und
 - b) alle Autokorrelationskoeffizienten von $0 - 3 \sqrt{\text{Var } R}$ bis $0 + 3 \sqrt{\text{Var } R}$ nicht für eine Autokorrelation, d.h. aber für eine Zufallsverteilung sprechen.
- Die Irrtumswahrscheinlichkeit, dass Autokorrelationskoeffizienten einer zufallsverteilten Reihe als Werte einer autokorrelierten Reihe betrachtet werden, ist nach BIENAYME-TSCHEBYSCHEFF¹⁹ kleiner $1/t^2$ und für $t = 3$ kleiner 11,11 %.

¹⁸ ANDERSON, O.: Probleme der statistischen Methodenlehre in den Sozialwissenschaften, 3. Auflage, Würzburg 1957, S.205. ANDERSON geht hier in einem Urnenmodell vom Fall "mit Zurücklegen" aus.

¹⁹ ANDERSON, O., a.a.O., S. 132

Wird durch das Prüfverfahren der Hypothese der Zufallsverteilung für eine Reihe widersprochen, ist die Vermutung naheliegend, dass infolge eines Trends, einer Saisonkomponente oder einer zyklischen Komponente die Zufallsverteilung abgelehnt wird. Diese Reihen, deren Untersuchung einen eigenen Problemkreis darstellt, sollen, wie bereits erwähnt, nicht behandelt werden. Vielmehr besteht hier die Aufgabe, an einem Beispiel die Untersuchungsmethode für eine spezielle Gruppe von zufallsverteilten Reihen, die bestimmten Verteilungsgesetzen gehorchen, zu zeigen. Bevor wir die gegebene Reihe von Tagesbestellungen auf Zufallsverteilung untersuchen, soll an zwei Beispielen die Wirksamkeit des Prüfverfahrens gezeigt werden.

332 Prüfung einer Zeitreihe mit einer regelmässigen zyklischen Komponente und einer schwachen Zufallskomponente

Wir bilden in Tabelle 2 eine Zeitreihe x_i ($i=1 \dots n$) mit einer regelmässigen zyklischen Komponente, die von einer schwachen Zufallskomponente überlagert wird. Die Werte der Zufallskomponente können dabei -1, 0, +1 sein²⁰. Für das Prüfverfahren soll untersucht werden, ob regelmässige Schwankungen in der Zeitreihe noch zu erkennen sind. Die zyklische Bewegung wiederholt sich nach jeweils 5 Tagen. So wird, falls eine Autokorrelation für die Zeitreihe festzustellen ist, diese am grössten bei einem $j=5$ sein. Wir führen deshalb die Berechnung des Autokorrelationskoeffizienten nur für $j=5$ durch.

Für $n = 30$ und $j = 5$ ergibt sich der Autokorrelationskoeffizient R für die Reihe x_i nach der Formel (1) als:

$$R = \frac{29}{25} \cdot \frac{74}{120} + \frac{1}{30} = 0.7525;$$

ferner gilt nach Formel (2) und (3):

$$\text{Var } R = \frac{1}{25} = 0.04; \quad \sqrt{\text{Var } R} = 0.2$$

$$t = \frac{R}{\sqrt{\text{Var } R}} = \frac{0.7525}{0.2} = 3.76$$

Da $|t|$ grösser als die vorgegebene Grenze 3 ist, wird eine Autokorrelation als hinreichend gesichert angesehen und die Zufallsverteilung verworfen.

²⁰ Vgl. dazu unter 333 eine für diese Reihe starke Zufallskomponente mit den Werten $\pm 0, \pm 1, \dots, \pm 9$.

Tabelle 2: Zeitreihe und ihre Komponenten bei schwacher Zufallskomponente

Zyklische Komponente	Zufalls- Komponente	Zeitreihe (x_i)
10	1	11
11	- 1	10
13	0	13
15	1	16
14	- 1	13
10	- 1	9
11	0	11
13	0	13
15	- 1	14
14	- 1	13
10	0	10
11	1	12
13	- 1	12
15	0	15
14	0	14
10	- 1	9
11	1	12
13	1	14
15	0	15
14	- 1	13
10	- 1	9
11	1	12
13	1	14
15	0	15
14	- 1	13
10	- 1	9
11	0	11
13	- 1	12
15	- 1	14
14	- 1	13

333 Prüfung einer Zeitreihe mit einer regelmässigen zyklischen Komponente und einer starken Zufallskomponente

Wir ersetzen nun die schwache Zufallskomponente der Zeitreihe unter 332 durch eine starke Zufallskomponente; die Werte dieser Zufallskomponente können 0, $\pm 1 \dots \pm 9$ sein (vgl. Tabelle 3). Die neue Zeitreihe bezeichnen wir ebenfalls mit $x_i (i=1 \dots n)$.

Tabelle 3: Zeitreihe und ihre Komponenten bei starker Zufallskomponente

Zyklische Komponente	Zufalls- Komponente	Zeitreihe (x_1)
10	9	19
11	0	11
13	7	20
15	-2	13
14	2	16
10	-1	9
11	-7	4
13	-5	8
15	-5	10
14	7	21
10	-3	7
11	0	11
13	-2	11
15	6	21
14	6	20
10	-7	3
11	8	19
13	5	18
15	-4	11
14	-3	11
10	2	12
11	-0	11
13	-9	4
15	8	23
14	0	14
10	-7	3
11	-6	5
13	-7	6
15	-6	9
14	-2	12

Für die Reihe x_1 ergibt sich bei $n = 30$ und $j = 5$:

$$R = \frac{29}{25} \cdot \frac{38.25}{1009.90} + \frac{1}{30} = 0.0712$$

$$\text{Var } R = \frac{1}{25} = 0.04; \quad \sqrt{\text{Var } R} = 0.2$$

$$t = \frac{R}{\sqrt{\text{Var } R}} = \frac{0.0712}{0.2} = 0.04$$

Da $|t|$ kleiner 3 ist, wird eine Autokorrelation nicht als gesichert nachgewiesen angesehen und die Hypothese der Zufallsverteilung angenommen.

334 Anwendung des Prüfverfahrens auf ein praktisches Beispiel

Mit Hilfe des dargestellten Prüfverfahrens untersuchen wir unser praktisches Beispiel einer Nachfragereihe. (Vgl. unter 321). Die Prüfung einer Reihe, deren Struktur unbekannt ist, auf Autokorrelation wird um so sicherer je mehr Autokorrelationskoeffizienten für verschiedene j berechnet und geprüft werden. Wir wollen hier von umfangreichen Rechnungen absehen und uns darauf beschränken, die Reihenprüfung nur für ein $j = 1$ durchzuführen. Bezeichnen wir die Tagesbestimmungsmengen der Nachfragereihe mit x_1 , ergibt sich bei $n = 150$ und $j = 1$ nach den Formeln (1) bis (3):

$$R = \frac{149}{149} \cdot \frac{-6\,915\,025.16}{116\,245\,739.20} + \frac{1}{150} = -0.0528$$

$$\text{Var } R = \frac{1}{149} = 0.0067; \quad \sqrt{\text{Var } R} = 0.0819$$

$$t = \frac{R}{\sqrt{\text{Var } R}} = \frac{-0.0528}{0.0819} = 0.64$$

Da $|t|$ kleiner 3 ist, darf die Nachfragereihe als zufallsverteilt angesehen werden.

Weitere Aussagen über die Struktur der Nachfragereihen erhalten wir, wenn wir die Reihen in Komponenten zerlegen und die Komponenten einzeln untersuchen.

34 ZERLEGUNG EINER ZUFALLSVERTEILTEN NACHFRAGEREIHES IN KOMPONENTEN

341 Gründe der Zerlegung

Wenn wir eine zufallsverteilte Nachfragereihe in Komponenten zerlegen und auch für jede der Komponenten einzeln feststellen können, dass sie zufallsverteilt ist, wird unsere Hypothese für eine zufallsverteilte Nachfragereihe gefestigt; die Zufallsverteilung der Nachfragereihe wird plausibler.²¹

²¹ Ist eine der Komponenten regelmässig, so kann, wie bereits erwähnt (vgl. unter 333), die Nachfragereihe bei entsprechend starker Zufallskomponente trotzdem zufällig sein. Eine nähere Untersuchung dieser Gruppe von zufallsverteilten Reihen würde im Rahmen dieser Arbeit zu weit führen und kann deshalb nicht durchgeführt werden. Es werden im folgenden nur Produkte behandelt für die beide Komponenten zufallsverteilt sind.

Noch ein weiterer Grund spricht für die Reihenzerlegung. Wollten wir Nachfragereihen des hier zu untersuchenden Typs durch nur eine Verteilung erfassen, würden wir für die Verteilungsgesetze komplizierte Ausdrücke bekommen. Deshalb dient die Zerlegung der Reihen in zufallsverteilte Komponenten auch dazu, eine Nachfrageerfassung über einzelne Komponenten durchzuführen, deren Verteilungsgesetze im Vergleich zu den der Nachfragereihen bedeutend einfacher sind.

342 Systematik der Zerlegung

Haben wir z. B. eine Zeitreihe mit den Werten:

0 0 2 0 1 0 7 0 0 0 ,

so können wir sie zerlegen in:

- a) eine Komponente der Bestellfolge und
- b) eine Mengenkomponte.

Die Komponente der Bestellfolge besteht nur aus der Folge der Ereignisse Bestelltage und Nichtbestelltage, wobei die Bestelltage mit 1 und die Nichtbestelltage mit 0 bezeichnet werden. Für das angegebene Beispiel ergibt sich so als Komponente der Bestellfolge:

0 0 1 0 1 0 1 0 0 0

Die Mengenkomponte entsteht, indem die Tagesbestellmengen grösser Null in zeitlich unmittelbarer Folge aneinandergereiht werden. Sie bestimmen so den Wert der Tagesbestellmenge für den Fall, dass in der Komponente der Bestellfolge das Ereignis Bestelltag eintritt. Die Mengenkomponte für das gegebene Beispiel ist:

2 1 7

Wollen wir die Nachfragereihe wieder aus den beiden Komponenten zusammensetzen, so müssen wir folgenden Weg einschlagen. Wir fragen zuerst danach, ob die Komponente der Bestellfolge dem Ereignis 0 oder 1, d. h. Nichtbestelltag oder Bestelltag, entspricht. Für das Ereignis Nichtbestelltag wird die Tagesbestellmenge gleich 0 gesetzt. Für das Ereignis Bestelltag wird die Tagesbestellmenge durch die Mengenkomponte bestimmt. Im Beispiel ist in der Komponente der Bestellfolge der dritte Wert der Reihe der erste Bestelltag. Die Tagesbestellmenge des ersten Bestelltages der Komponente der Bestell-

folge wird durch den ersten Wert der Mengenkomponte, Zwei, bestimmt. Der zweite Bestelltag ist der fünfte Wert der Komponente der Bestellfolge; für ihn wird die Tagesbestellmenge durch den zweiten Wert der Mengenkomponte, Eins, bestimmt; usf.

So können wir unsere Nachfragereihe wieder aus zwei Komponenten bilden, wobei die erste Komponente im Zeitablauf besteht und die zweite Komponente dann in Erscheinung tritt, wenn die erste Komponente ein bestimmtes Ereignis, das Ereignis Bestelltag, hat.

343 Zerlegung einer Nachfragereihe gezeigt am praktischen Beispiel.²²

Tabelle 4: Die Komponente der Bestellfolge²²

Woche	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag
1	0	0	1	0	0
2	1	0	0	0	0
3	0	0	0	1	1
4	1	0	1	1	0
5	1	1	0	0	0
6	0	0	0	0	0
7	1	0	1	0	0
8	0	0	1	0	0
9	0	0	0	0	1
10	1	1	0	0	0
11	0	0	1	0	1
12	0	1	1	1	0
13	0	0	1	0	0
14	0	0	0	0	0
15	0	1	1	0	0
16	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0
18	0	0	1	0	0
19	0	1	1	1	1
20	0	0	0	0	0
21	1	1	1	0	0
22	0	0	0	1	0
23	0	1	0	0	0
24	0	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0
26	1	0	0	0	0
27	1	0	0	0	0
28	1	1	1	0	0
29	1	1	0	0	0
30	0	0	0	0	0

²² Vgl. Tabelle 1, S.24

Die Komponente der Bestellfolge enthält die Ereignisse Bestelltage und Nichtbestelltage der Nachfragerreihe, gekennzeichnet durch die Zahlen Null und Eins. Die Komponente ist in Tabelle 4 zeilenweise von links nach rechts lesbar, wobei jede Zeile die Werte einer Woche von Montag bis Freitag darstellt.

Die Mengenkomponte enthält die unmittelbar aufeinanderfolgenden Tagesbestellungsmengen grösser Null. In Tabelle 5 sind die Werte ebenfalls zeilenweise angeordnet.

Tabelle 5: Die Mengenkomponte

Zeile	Werte der Mengenkomponte					
1	300	2 500	1 350	300	300	3
2	2 331	400	2 692	25	250	300
3	300	1 525	200	1 500	1 250	500
4	2 000	50	550	150	91	2
5	3 100	2 750	200	4 500	1 500	575
6	25	10	1 125	2 500	6 650	100
7	975	1 000	5	2 100		

Beide Komponenten zeigen einen sehr unregelmässigen Verlauf. In den folgenden Ausführungen werden die Komponenten daraufhin geprüft, ob auch für sie Zufallsverteilung angenommen werden darf.

35 PRÜFUNG DER KOMPONENTE DER BESTELLFOLGE AUF ZUFALLS- VERTEILUNG

351 Zum Prinzip der Prüfung

Bei der Prüfung der Komponente der Bestellfolge auf Zufallsverteilung gehen wir in zwei Schritten vor. Wir prüfen:

- a) ob sich die Anzahl der Bestelltage von Woche zu Woche beeinflusst,
und

b) ob innerhalb der Wochen ein Wochenrhythmus der Bestelltage besteht, d.h. ob für die einzelnen Werkstage Montag bis Freitag verschiedene Wahrscheinlichkeiten für einen Bestelleingang festgestellt werden können, oder ob die Wahrscheinlichkeit des Bestelleingangs für alle Werkstage als gleich angesehen werden kann.

352 Prüfung der Anzahl der Bestelltage in unmittelbar aufeinanderfolgenden Wochen

Wir stellen für jede der 30 aufeinanderfolgenden Wochen die Anzahl der Bestelltage an Hand der Komponente der Bestellfolge fest und prüfen, ob die Werte autokorreliert sind.

Bei der praktischen Durchführung dieser Prüfung für mehrere Produkte, die zufällig ausgewählt wurden, konnte festgestellt werden, dass bei gegebener Autokorrelation diese am stärksten zwischen unmittelbar aufeinanderfolgenden Werten war.

Das bedeutet, dass sich die Zahlen der Bestelltage je Woche, soweit eine Abhängigkeit besteht, am stärksten in den unmittelbar aufeinanderfolgenden Wochen beeinflussen. Es genügt deshalb, wenn wir eine Prüfung auf Autokorrelation für ein $j = 1$ durchführen. Wir bezeichnen in Tabelle 6 und für die Berechnungen die Anzahl der Bestelltage in der i -ten Woche mit x_i .

Tabelle 6: Anzahl der Bestelltage in unmittelbar aufeinanderfolgenden Wochen

Woche	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x_i	1	1	2	3	2	0	2	1	1	2	2	3	1	0	2
Woche	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x_i	0	0	1	4	0	3	1	1	0	0	1	1	3	2	0

Für $n = 30$ und $j = 1$ ergibt sich für die Reihe x_i :

$$R = \frac{39}{39} \cdot \frac{-2.7719}{36.6670} + \frac{1}{30} = -0.0423$$

$$\text{Var } R = \frac{1}{29} = 0.19; \quad \sqrt{\text{Var } R} = 0.44;$$

$$t = \frac{R}{\sqrt{\text{Var } R}} = -\frac{0.0423}{0.44} = -0.09$$

Da $|t|$ kleiner 3, dürfen die Bestelltage von Woche zu Woche als voneinander unabhängig angesehen werden.

353 Prüfung der Verteilung der Bestelltage innerhalb der Wochen auf Zufälligkeit

Bei Zufallsverteilung ist für jeden Werktag die Wahrscheinlichkeit eines Bestelltages gleich, d.h., dass die in einer Periode von 30 Wochen enthaltenen, jeweils 30 gleichen Werktage (für Montag bis Freitag) gleiche Wahrscheinlichkeiten der Bestelltage haben müssen.

Zur Bestimmung dieser Wahrscheinlichkeiten benötigen wir die Wahrscheinlichkeit eines Bestelltages für einen Werktag. Da diese nicht bekannt ist, nehmen wir die relative Häufigkeit der Bestelltage in der beobachteten Periode als Schätzwert, $p = 40/150 = 0.27$. Mit dem Schätzwert können wir nun die erwartete Anzahl der Bestelltage für 30 Werktage mit $30 \cdot 0.27 = 8.10$ errechnen. Die so bestimmten theoretischen Werte der Anzahl der Bestelltage für 30 gleiche Werktage sind für die Tage Montag bis Freitag gleich.

Zu den theoretischen sind die empirischen Häufigkeiten der Bestelltage, jeweils für die gleichen Werktage, aus der gegebenen Komponente der Bestellfolge zu bestimmen.

Über den χ^2 -Test erfolgt der Vergleich von theoretischer und empirischer Verteilung. Ist der Unterschied zufällig, dürfen wir Zufallsverteilung der Bestelltage annehmen; ist der Unterschied wesentlich, ist die Hypothese der Zufallsverteilung zu verwerfen. Die folgende Tabelle enthält die empirischen und theoretischen Häufigkeiten der Bestelltage in jeweils 30 gleichen Werktagen für die Tage Montag bis Freitag.

Tabelle 7: Empirische und theoretische Verteilung der Anzahl der Bestelltage für die Tage Montag bis Freitag, in 30 Wochen

Werktag	empirische Häufigkeit	theoretische Häufigkeit
Montag	10	8.10
Dienstag	9	8.10
Mittwoch	12	8.10
Donnerstag	5	8.10
Freitag	4	8.10

Die Bedingung für den χ^2 -Test, dass die theoretischen Klassenhäufigkeiten grösser oder gleich 5 sein sollen²³, ist für unser Beispiel erfüllt. Die Zahl

²³ GRAF, U., HENNING, H. J.: Formeln und Tabellen der mathematischen Statistik, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1958, S. 12

der Klassen ist durch die Werktage Montag bis Freitag mit $k = 5$ gegeben.

Es ergibt sich als χ^2 für den Vergleich der empirischen Häufigkeiten $f(m)$ und der theoretischen Häufigkeiten $h(m)$ für die Klassen $m(m=1 \dots k)$:²³

$$(4) \quad \chi^2 = \sum_{m=1}^k \frac{[f(m) - h(m)]^2}{h(m)} = 5.69$$

Bei der Berechnung der Zahl der Freiheitsgrade ist zu berücksichtigen, dass die theoretischen Werte über einen geschätzten Parameter bestimmt sind²⁴ und es ergibt sich so bei der Gegenüberstellung von zwei Reihen, bei einer Gliederung der Werte in 5 Klassen, die Zahl der Freiheitsgrade mit 3. Bei 3 Freiheitsgraden und 5 % Irrtumswahrscheinlichkeit sprechen alle χ^2 -Werte kleiner oder gleich 7.82²⁵ für einen zufälligen Unterschied der Verteilungen; das heisst aber, wir dürfen bei einem χ^2 gleich 5.69 annehmen, dass kein Wochenrhythmus für die Verteilung der Bestelltage besteht und die Verteilung innerhalb der Wochen zufällig ist.

Bei Zufallsverteilung der Bestelltage von Woche zu Woche und innerhalb der Wochen dürfen wir Zufallsverteilung für die gesamte Komponente der Bestellfolge annehmen.

Wir wollen nun für die MengenkompONENTE prüfen, ob wir auch sie als zufallsverteilt betrachten dürfen.

36 PRÜFUNG DER MENGENKOMPONENTE AUF ZUFALLSVERTEILUNG

361 Zum Prinzip der Prüfung

Für die MengenkompONENTE soll über die Prüfung auf Autokorrelation festgestellt werden, ob zwischen den einzelnen Werten ein Zusammenhang besteht, oder ob die Werte als voneinander unabhängig, als zufallsverteilt angesehen werden können. Wir gehen wieder nach dem unter 331 dargestellten Prüfverfahren vor. (Vgl. S.27)

²⁴ DIXON, W. J., MASSEY, F. J.: Introduction to Statistical Analysis, New York, Toronto, London, 1957, S. 225, 226.

HOEL, P. G.: Introduction to Mathematical Statistics, 2. Edition, New York, 1957, S. 170

²⁵ GRAF, U., HENNING, H. J., a. a. O., S. 65

362 Durchführung der Prüfung für das praktische Beispiel

Auch die Prüfung der Mengenkomponte auf Zufallsverteilung gewinnt, wie die Prüfung der Reihe der Tagesbestellmengen, an Zuverlässigkeit, je mehr Autokorrelationskoeffizienten für verschiedene j berechnet werden. Es soll aber auch hier, wie bei der Nachfragereihe, die Prüfung nur für ein $j = 1$ gezeigt werden.

Bezeichnen wir die Werte der Mengenkomponte mit x_i ($i=1 \dots n$), (vgl. Tabelle 5), so ergibt sich für $n = 40$ und $j = 1$ der Autokorrelationskoeffizient nach Formel (1):

$$R = \frac{39}{39} \cdot \frac{-943\,925.88}{77479\,387.61} + \frac{1}{40} = -0.0128$$

ferner gilt nach den Formeln (2) und (3):

$$\text{Var } R = \frac{1}{39} = 0.16; \quad \sqrt{\text{Var } R} = 0.4$$

$$t = \frac{R}{\sqrt{\text{Var } R}} = \frac{0.0128}{0.4} = 0.03$$

Da $|t|$ kleiner 3 ist, widerspricht die Verteilung der Werte der Mengenkomponte nicht einer Zufallsverteilung.

Zusammenfassend können wir also feststellen, dass sowohl bei der Prüfung der Komponente der Bestellfolge als auch der Mengenkomponte einer Zufallsverteilung nicht widersprochen wird; damit wird die Hypothese der Zufallsverteilung der Nachfragereihe gefestigt.

In den folgenden Abschnitten wird behandelt, wie die in eine Komponente der Bestellfolge und eine Mengenkomponte zerlegte Nachfragereihe durch theoretische Verteilungen erfasst werden kann.

37 DIE VERTEILUNGSGESETZE DER KOMPONENTEN

371 Zum Verteilungsgesetz der Komponente der Bestellfolge

Für die Komponente der Bestellfolge haben wir im Abschnitt 35 festgestellt, dass in ihr die Bestelltage als zufallsverteilt angesehen werden können. Zu ihrer Erfassung benötigen wir nun noch eine Aussage über die Wahrscheinlichkeit eines Bestelltages. Wenn wir die Komponente der Bestellfolge (vgl. Tabelle 4) als Stichprobe betrachten, kann für die Wahrscheinlichkeit P der Be-

stelltage, bei einem Stichprobenumfang von $n = 150$, einer relativen Häufigkeit der Bestelltage in der Stichprobe $p = 40/150 = 0,27$ und einer Gegenwahrscheinlichkeit $q = 0,73$, ein Vertrauensbereich berechnet werden. Bei genügend grossem n , das für unser Beispiel hier mit 150 gegeben ist, darf für die Verteilung der p -Werte ein normales Verteilungsgesetz angenommen werden.²⁶ Erlauben wir eine Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 %, so ist das t der Normalverteilung 1,96. Unter den hier gültigen Voraussetzungen gilt für die Eingrenzung von P allgemein

$$(5) \quad p - t \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \leq P \leq p + t \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}};$$

setzen wir die gegebenen Zahlen ein, so lautet die Eingrenzung:

$$\begin{aligned} 0,27 - 1,96 \sqrt{\frac{0,27 \cdot 0,73}{150}} &\leq P \leq 0,27 + 1,96 \sqrt{\frac{0,27 \cdot 0,73}{150}} \\ 0,27 - 0,07 &\leq P \leq 0,27 + 0,07 \\ 0,20 &\leq P \leq 0,34 \end{aligned}$$

Der Vertrauensbereich für P beträgt ± 26 % von p , ist also sehr gross. Eine engere Eingrenzung von P würden wir durch einen grösseren Stichprobenumfang n und einen höheren Anteilswert p der Bestelltage in der Stichprobe erhalten. Ist der Stichprobenumfang z. B. $n = 300$ und $p = 0,73$, ergibt sich eine Eingrenzung von P :

$$\begin{aligned} 0,73 - 0,05 &\leq P \leq 0,73 + 0,05 \\ 0,68 &\leq P \leq 0,78 \end{aligned}$$

Der Fehlerbereich beträgt hier nur noch ± 7 % von p .

Allgemein können wir sagen, dass der Schätzwert für den Parameter P um so besser wird, je grösser der Stichprobenumfang n , d. h. je länger die zu untersuchenden Reihen von Tagesbestellmengen sind und je höher der Anteil der Bestelltage in den Reihen ist.

Für unser Zahlenbeispiel, das nur die Grundgedanken einer betrieblichen Untersuchung darstellen soll, wollen wir $p = 0,27$ als Schätzwert für P annehmen. Wir vernachlässigen den grossen Fehlerbereich jedoch nur unter dem Vorbehalt, dass für exakte betriebliche Untersuchungen in der Praxis von längeren Zahlenreihen ausgegangen werden muss, wobei die Häufigkeit der Bestelltage möglichst gross sein soll.

Durch P ist die zufallsverteilte Komponente der Bestellfolge definiert.

²⁶ Vgl. KELLERER, H.: Theorie und Technik des Stichprobenverfahrens, München 1953, S. 36 und 43.

372 Zum Verteilungsgesetz der Mengenkomponte

Für die Mengenkomponte haben wir unter 36 festgestellt, dass ihre Verteilung einer Zufallsverteilung nicht widerspricht.

Zur vollständigen Erfassung der Mengenkomponte benötigen wir noch das Verteilungsgesetz der Werte der Komponte. Wir gehen von der Vermutung einer logarithmischen Normalverteilung²⁷ aus.

Einen ersten Anhaltspunkt über den Verteilungstyp können wir durch eine Häufigkeitsverteilung erhalten. Wir benötigen dazu die logarithmischen Werte der Mengenkomponte (vgl. Tabelle 8), für die wir eine Häufigkeitsverteilung mit 6, in logarithmischem Masstab gleich grossen Klassen bilden.

Tabelle 8: Logarithmische Werte der Mengenkomponte

Zeile	Logarithmische Werte der Mengenkomponte					
1	2.48	3.40	3.13	2.48	2.48	0.48
2	3.37	2.60	3.43	1.40	2.40	2.48
3	2.48	3.18	2.30	3.18	3.10	2.70
4	3.30	1.70	2.74	2.18	1.96	0.30
5	3.49	3.44	2.30	3.65	3.18	2.76
6	1.40	1.00	3.05	3.40	3.82	2.00
7	2.99	3.00	0.70	3.32		

Tabelle 9 enthält für die Bildung einer Häufigkeitsverteilung eine Klasseneinteilung in logarithmischem und entlogarithmiertem Masstab, sowie die absoluten Häufigkeiten der logarithmischen bzw. entlogarithmierten Werte der Mengenkomponte in den jeweiligen Klassen.

Tabelle 9: Häufigkeitsverteilung der Werte der Mengenkomponte bei logarithmischer und entlogarithmierter Klasseneinteilung

Klassen in logarithmischem Masstab	Klassen in entlogarithmiertem Masstab	absolute Häufig- keiten der Tages- bestellungen
1	2	3
bis 0.75	bis 5.62	3
über 0.75 " 1.50	über 5.62 " 31.60	3
" 1.50 " 2.25	" 31.60 " 182.00	4
" 2.25 " 3.00	" 182.00 " 1 000.00	14
" 3.00 " 3.75	" 1 000.00 " 5 620.00	15
" 3.75 " 4.50	" 5 620.00 " 31 600.00	1

²⁷ AITCHISON, J., BROWN, J. A. C.: The Lognormal Distribution, Cambridge 1957, S. 7: Consider an essentially positive variate X ($0 < x < \infty$) such that $Y = \log X$ is normally distributed with mean μ and variance σ^2 . We then say, that X is lognormally distributed...

In Abbildung 7 sind die in den Spalten 1 und 3 der Tabelle 9 enthaltenen Werte graphisch dargestellt.

Abbildung 7 zeigt für die logarithmischen Werte der Tagesbestellungen nur ein angenähert normales Verteilungsgesetz. Es besteht jedoch die Möglichkeit, dass die Verzerrung dieses empirischen Verteilungsgesetzes durch die relativ geringe Zahl von Werten bedingt ist. Wir wollen deshalb numerisch prüfen, ob wir die Verteilung als logarithmisch-normal ansehen dürfen.

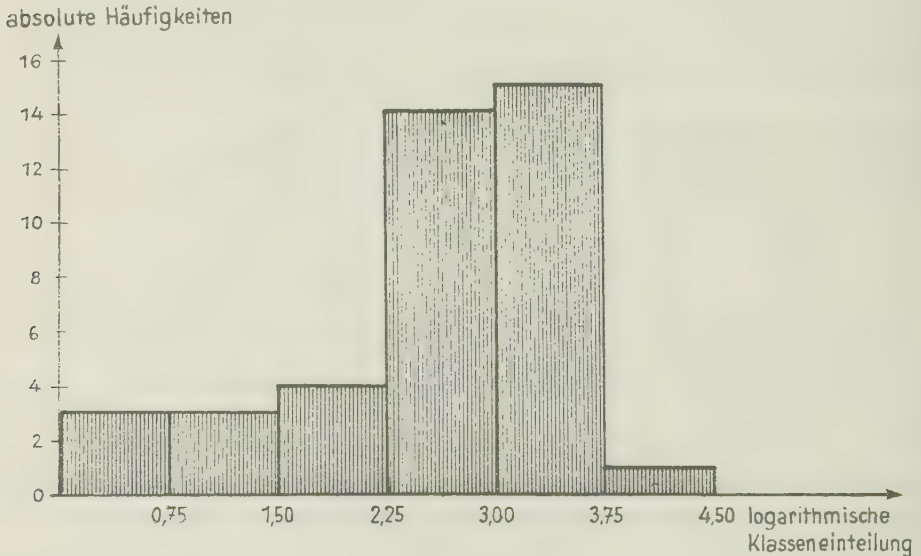


Abbildung 7: Häufigkeitsverteilung der Werte der Mengenkomponente bei logarithmischer Klasseneinteilung

Zur Prüfung des empirischen Verteilungsgesetzes der gegebenen Mengenkomponente auf eine logarithmische Normalverteilung gehen wir in drei Schritten vor:

- a) Wir definieren das theoretische logarithmisch-normale Verteilungsgesetz einer Mengenkomponente allgemein für eine Grundgesamtheit.
- b) Wir bestimmen für eine gegebene Mengenkomponente, die als Stichprobe betrachtet wird, Schätzwerte für die Parameter μ und σ des theoretischen logarithmisch-normalen Verteilungsgesetzes in der Grundgesamtheit.
- c) Schliesslich werden durch den Kolmogorov-Smirnov-Test²⁸ das theoretische und das gegebene empirische Verteilungsgesetz verglichen. Davon, ob die

²⁸ Vgl. VAN DER WAERDEN, B.L.: Mathematische Statistik, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1957, S. 67, 336.

empirische Verteilung als wesentlich verschieden von der theoretischen anzusehen ist oder nicht, hängt es ab, ob wir das empirische Verteilungsgesetz als logarithmisch normal annehmen dürfen.

Neben dem Kolmogorov-Smirnov-Test ist hier als Prüfverfahren auch der χ^2 -Test in Erwägung zu ziehen.

Der χ^2 -Test besitzt den Vorteil, dass er, für den Fall geschätzter Parameter in der theoretischen Verteilung, eine Berücksichtigung des Schätzwertcharakters dieser Parameter im Test erlaubt.

Andererseits hat er als Erfordernis für seine Anwendung theoretische Klassenhäufigkeiten $h(m)$ von grösser oder gleich Fünf.²⁹ Es ist dabei zu beachten, dass bei der Anwendung des χ^2 -Tests zum Vergleich einer empirischen Verteilung und einer normalen theoretischen Verteilung, sich die Zahl der Freiheitsgrade bei zwei geschätzten Parametern (der theoretischen Verteilung) für n Klassen mit $n - 3$ ergibt. Da χ^2 bei null Freiheitsgraden nicht mehr definiert ist und so $n - 3$ grösser oder gleich Eins sein muss, muss die Zahl der Klassen grösser oder gleich Vier sein. Das bedeutet; eine Zusammenlegung der Klassen auf weniger als Vier ist nicht möglich. Der Fall, dass hierbei in unserem Zahlenmaterial die Bedingung $h(m)$ grösser oder gleich Fünf nicht erfüllt ist, tritt häufig auf.

Demgegenüber besitzt der Kolmogorov-Smirnov-Test³⁰ den für unser Problem entscheidenden Vorteil, unabhängig von Klassenhäufigkeiten und auch bei kleinen Stichproben anwendbar zu sein.

Der Nachteil des Kolmogorov-Smirnov-Tests ist, dass er exakt angewandt die Kenntnis der Parameter der theoretischen Verteilung verlangt. Jedoch gibt F. J. MASSEY³¹ einen Hinweis, dass geschätzte Parameter zu einer Verminderung der "critical level", d. h. der Sicherheitsgrenzen führen. Tabellen für Sicherheitsgrenzen bei geschätzten Parametern bestehen für den Kolmogorov-Smirnov-Test nicht. Es verbleibt die Möglichkeit, mit den Tabellenwerten

²⁹ GRAF, U., HENNING, H. J., a. a. O., S. 12

³⁰ Weitere Ausführungen dazu vgl. S. 47 ff.

³¹ MASSEY, F. J. in Journal of the American Statistical Association, (JASA), Vol. 46, 1951, S. 73

bei gegebener theoretischer Verteilung zu arbeiten, wobei jedoch die Irrtumswahrscheinlichkeit für einen bestimmten Tabellenwert als "critical level" bei geschätzten Parametern geringer ist als bei gegebenen Parametern der theoretischen Verteilung. Bei einem Stichprobenumfang von z. B. $n = 20$ und 5 % Irrtumswahrscheinlichkeit ist die maximale Differenz des Kolmogorov-Smirnov-Tests, bei gegebenen Parametern der theoretischen Verteilung, 0.23. Sind die Parameter dagegen geschätzt, so ist bei einer Differenz von 0.23 die Irrtumswahrscheinlichkeit bei einer Ablehnung des Tests kleiner 5%.³²

Da diese Wahrscheinlichkeitsaussage für geschätzte Parameter der theoretischen Verteilung hier als hinreichend angesehen wird, kann der Kolmogorov-Smirnov-Test zum Vergleich der empirischen und theoretischen Verteilung angewandt werden.

Bezeichnen wir die Werte der Mengenkomponte mit z und die logarithmischen Werte der Mengenkomponte mit $v = \log z$, so gilt für das theoretische Verteilungsgesetz einer logarithmisch-normalverteilten Grundgesamtheit von z

$$(6) \quad f(v) dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp - \left[\frac{(v-\mu)^2}{2\sigma^2} \right] \cdot dv ,$$

dabei sind:

- v logarithmische Werte der Mengenkomponte in einer Grundgesamtheit;
- $f(v)$ Wahrscheinlichkeitsdichte von v ;
- σ mittlere quadratische Abweichung der logarithmischen Werte der Mengenkomponte in einer Grundgesamtheit;
- μ Mittelwert der logarithmischen Werte der Mengenkomponte in einer Grundgesamtheit.

Bestimmt wird das Verteilungsgesetz durch die Parameter μ und σ . Für die Prüfung der Werte der Mengenkomponte auf ein logarithmisch-normales Verteilungsgesetz müssen wir zu dem gegebenen empirischen Verteilungsgesetz der Mengenkomponte das vermutete theoretische Verteilungsgesetz bestimmen

³² MASSEY, F. J. hat bei einer empirischen Untersuchung bei 100 Stichproben vom Umfang 10 festgestellt, dass bei 5 % Irrtumswahrscheinlichkeit der Testwert bei geschätzten Parametern 0.29 im Vergleich zu 0.41 bei bekannten Parametern war. Vgl. JASA, Vol. 46, 1951, S.73

(vgl. Formel 6). Betrachten wir die Werte der Mengenkomponente als eine Stichprobe aus einer Grundgesamtheit, so können wir bei einer vorzugebenden Sicherheit bestimmen, in welchem Bereich die Parameter μ und σ des theoretischen Verteilungsgesetzes in der Grundgesamtheit liegen. (Repräsentationschluss.)

Beginnen wir beim Parameter μ . Wir bezeichnen die als Stichprobe betrachteten logarithmischen Werte der Mengenkomponente mit v_i ($i=1 \dots n$), ihren Mittelwert mit $\bar{v}$ und die mittlere quadratische Abweichung mit s .³³ Ist der Mittelwert für die logarithmischen Werte der Grundgesamtheit μ , so gilt für die Verteilung von t

$$(7) \quad t = \frac{\bar{v} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

bei kleinem Stichprobenumfang n die Studentverteilung und bei grossem Stichprobenumfang die Normalverteilung. Voraussetzung dabei ist, dass ein angenähert normales Verteilungsgesetz der logarithmischen Werte der Grundgesamtheit besteht.³⁴ Wir haben durch das Häufigkeitsdiagramm in Abbildung 6 dafür einen Hinweis bekommen. Der Umfang n der Mengenkomponente ist für unser Beispiel 40 und es darf deshalb als Verteilungsgesetz der t -Werte die Normalverteilung angenommen werden.

Bei bekanntem Verteilungsgesetz von t können wir nun über die Stichprobenwerte $\bar{v}$ und s den Parameter μ wie folgt eingrenzen:

$$(8) \quad \bar{v} - t \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{v} + t \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Für ein $\bar{v} = 2,5680$ und ein $s = 0,8752$ gilt für die Eingrenzung von μ bei einem t der Normalverteilung von 1,96, d. h. einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5%:

$$\begin{aligned} 2,5680 - 1,96 \frac{0,8752}{\sqrt{40}} &\leq \mu \leq 2,5680 + 1,96 \frac{0,8752}{\sqrt{40}} \\ 2,5680 - 0,2712 &\leq \mu \leq 2,5680 + 0,2712 \end{aligned}$$

³³

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})^2}{n - 1}}$$

³⁴ DIXON, W. J., MASSEY, F. J., a. a. O., S. 116

Zur Schätzung von μ dürfen wir den verhältnismässig grossen Fehlerbereich ($\pm 10.6\%$ von $\bar{v}$) nur unter dem Vorbehalt vernachlässigen, dass für exakte betriebliche Untersuchungen engere Fehlerbereiche erforderlich sind. Die Schätzung wird bei zunehmender Länge der Nachfragereihen und steigender Häufigkeit der Bestelltage genauer, weil durch sie der Stichprobenumfang der Mengenkompone-
 nte steigt und sich deshalb der Fehlerbereich verringert. Bei einer Nach-
 fragereihe von 300 Tagen und einer relativen Häufigkeit der Bestelltage von 0.73 ergibt sich der Stichprobenumfang zur Berechnung von μ mit $n = 220$.

Dabei ist der Fehlerbereich:

$$2.5680 - 0.1156 \leq \mu \leq 2.5680 + 0.1156$$

$$2.4524 \leq \mu \leq 2.6836$$

Der Fehlerbereich zur Schätzung von μ ist bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % nur noch $\pm 4.5\%$ von $\bar{v}$.

Auch für den Parameter σ können wir einen Fehlerbereich bestimmen. Nehmen wir ein logarithmisch-normales Verteilungsgesetz in der Grundgesamtheit an, so verteilt sich der Quotient aus Varianz der logarithmischen Werte in der Stichprobe und Varianz der logarithmischen Werte in der Grundgesamtheit nach einer χ^2/df -Verteilung (Chi-square over degrees of freedom) mit $n - 1$ Freiheitsgraden bei einem Stichprobenumfang von n .³⁵

Bei beiderseitiger jeweils 2 %iger Irrtumswahrscheinlichkeit sei das χ^2/df der Untergrenze gleich P_{02} und der Obergrenze gleich P_{98} . Es gilt dann bei 4 % Irrtumswahrscheinlichkeit die Beziehung:³⁵

$$(9) \quad \frac{s^2}{P_{98}} \leq \sigma^2 \leq \frac{s^2}{P_{02}}$$

Ist $s^2 = 0.7660$, $P_{02} = 0.5790$ und $P_{98} = 1.5182$ ³⁶, so gilt bei 4 % Irrtumswahr-

³⁵ DIXON, W. J., MASSEY, F. J.: Introduction to Statistical Analysis, New York 1957, S. 81

³⁶ Da die Werte P_{02} und P_{98} bei $n = 40$ für 39 Freiheitsgrade nicht direkt aus der χ^2/df -Tabelle von (DIXON-MASSEY: Introduction to Statistical Analysis, a. a. O., S. 386) abzulesen sind, müssen sie durch Interpolation berechnet werden. Es wird dabei von einer Tabelle der χ^2 -Verteilung ausgegangen (FISHER, R. A., YATES, F.: Statistical Tables, London 1957, S. 45) weil hier eine Interpolation nur zwischen Werten mit 38 und 40 Freiheitsgraden vorgenommen werden muss, im Vergleich zu einer Interpolation in der Tabelle der χ^2/df -Verteilung bei DIXON-MASSEY zwischen Werten mit 35 und 40 Freiheitsgraden. Es ergibt sich für 39 Freiheitsgrade:

$$P_{02} = \frac{23.838/40 + 22.304/38}{2} = 0.5790$$

$$P_{98} = \frac{60.436/40 + 57.969/38}{2} = 1.5182$$

scheinlichkeit

$$0.5045 \leq \sigma^2 \leq 1.3240$$

oder

$$0.71 \leq \sigma \leq 1.15$$

Der Fehlerbereich ist auch hier deshalb so gross, weil in unserem Beispiel die Nachfragereihe verhältnismässig kurz und die Häufigkeit der Bestelltage gering ist und sich so ein verhältnismässig kleiner Stichprobenumfang ergibt. Bei einer Nachfragereihe von 300 Tagen und einer Häufigkeit der Bestelltage von 0.73 würde sich eine Mengenkomponte vom Umfang $n = 220$ ergeben und bei einem unverändertem s eine Eingrenzung von σ bei 4 % Irrtumswahrscheinlichkeit

$$0.80 \leq \sigma \leq 0.96$$

Wir stellen so auch hier fest, dass das Ergebnis der Arbeit an Sicherheit gewinnt, bei zunehmender Länge der Nachfragereihe und steigender Häufigkeit der Bestelltage.

Wenn wir als Schätzwert für σ den Wert $s = 0.8752$ annehmen, wird der verhältnismässig grosse Fehlerbereich unseres Zahlenbeispiels vernachlässigt. Jedoch besteht auch hier der Vorbehalt, dass exakte betriebliche Untersuchungen längere Zahlenreihen erfordern.

Zusammenfassend können wir sagen, dass die Fehlerbereiche der Schätzwerte für die Parameter μ und σ (und auch P) abnehmen:

- a) bei steigender Länge der Reihen der Tagesbestellmengen und
- b) bei steigendem Anteil der Bestelltage.

Durch die Parameter μ und σ wird die theoretische Verteilung der Mengenkomponte definiert. Über den Kolmogorov-Smirnov-Test ist zu prüfen, ob wir empirische und theoretische Verteilung als zufällig verschieden betrachten können und als Verteilungsgesetz der Mengenkomponte die logarithmische Normalverteilung annehmen dürfen.

Der Kolmogorov-Smirnov-Test geht von kumulierten Wahrscheinlichkeitsverteilungen aus und wir müssen deshalb das empirische und das theoretische Verteilungsgesetz dieser Forderung anpassen.

Die empirische kumulierte Verteilung bestimmt zu jedem logarithmischen Wert der Mengenkomponte den Anteilswert der kleineren und gleich grossen Werte

in der Komponente. Bei 40 Werten ist der Anteilswert für einen Wert $1/40 = 0,0250$. Sind z.B. 2 Werte kleiner oder gleich $\lg 3 = 0,4771$, so ist die entsprechende kumulierte relative Häufigkeit der empirischen Verteilung $2 \cdot 0,0250 = 0,0500$. Tabelle 10 enthält die den einzelnen logarithmischen Werten der Mengenkomponeute zugehörigen, empirischen kumulierten Häufigkeitswerte. (Vgl. dazu Abbildung 8.)

Tabelle 10: Tabelle zur Bestimmung der empirischen kumulierten Verteilung

log. Werte der Mengenkomponente	empirische kumulierte Verteilung
0.3010	0.0250
0.4771	0.0500
0.6990	0.0750
1.0000	0.1000
1.3979	0.1250
.	.
.	.
.	.
.	.
.	.
3.4301	0.9000
3.4393	0.9250
3.4914	0.9500
3.6532	0.9750
3.8228	1.0000

Zur Ermittlung des theoretischen kumulierten Verteilungsgesetzes gehen wir von der bereits unter (6) definierten logarithmischen Normalverteilung aus:

$$f(v) dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp - \left[\frac{(v - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] dv$$

Zur Standardisierung der Verteilung setzen wir:

$$(11) \quad \frac{v - \mu}{\sigma} = \lambda$$

Durch Umformen ergibt sich aus (11)

$$(12) \quad v = \sigma \cdot \lambda + \mu$$

Differenzieren wir (12) nach $d\lambda$, so ergibt sich:

$$(13) \quad \frac{dv}{d\lambda} = \sigma$$

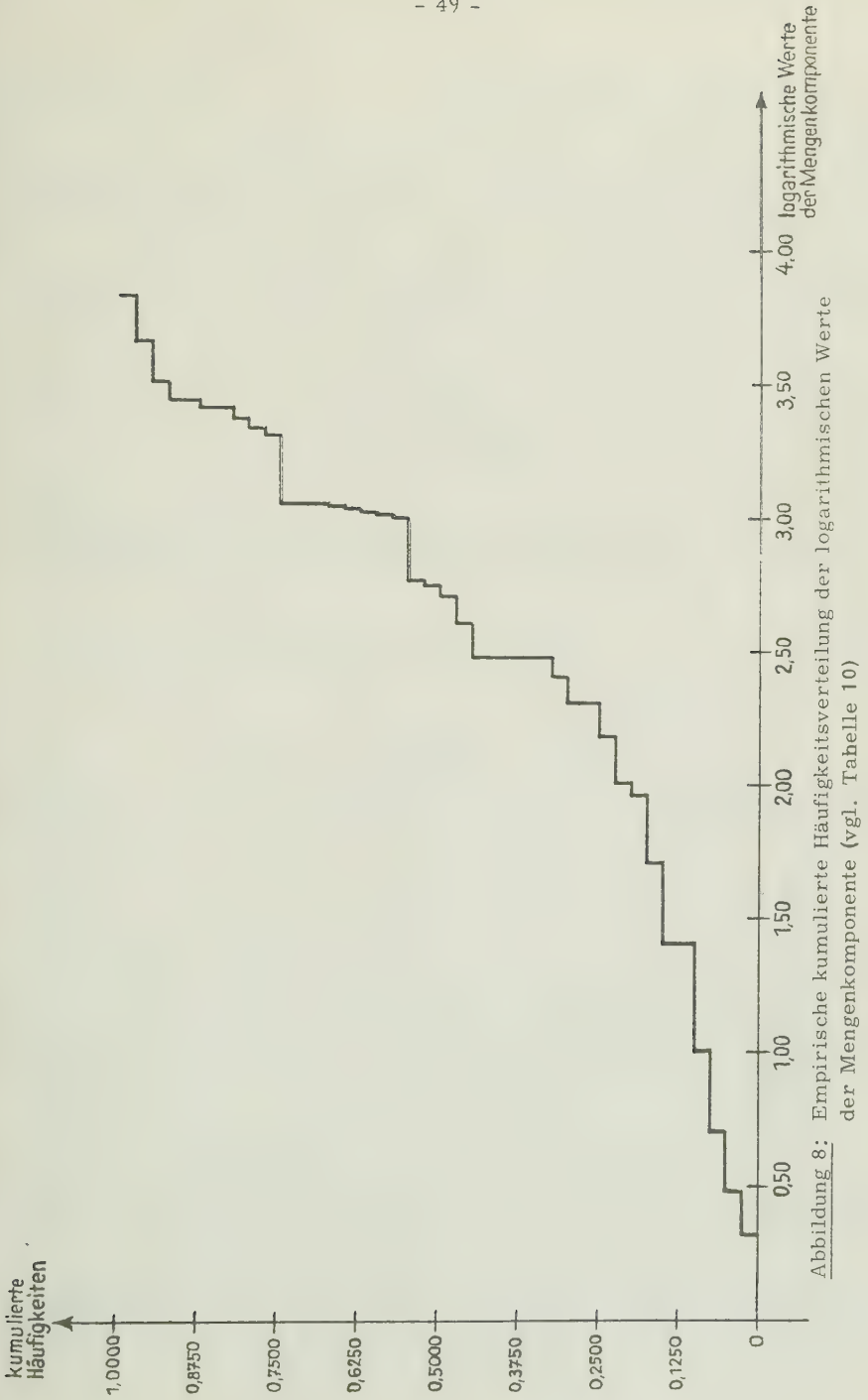


Abbildung 8: Empirische kumulierte Häufigkeitsverteilung der logarithmischen Werte der Mengenkomponente (vgl. Tabelle 10)

Durch Umformen von (13) erhalten wir:

$$(14) \quad dv = \sigma \cdot d\lambda$$

(11) und (14) eingesetzt in (6) ergibt die standardisierte Form der logarithmischen Normalverteilung:

$$(15) \quad g(\lambda) \cdot d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp -(\lambda^2/2) \cdot \sigma \cdot d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp -(\lambda^2/2) \cdot d\lambda$$

Die integrierte Form von Verteilung (15) lautet:

$$(16) \quad F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} g(\lambda) d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\lambda} \exp -(r^2/2) \cdot dr^{37}$$

Über diese Verteilung können wir die theoretischen kumulierten Häufigkeitswerte für unsere Mengenkompente bestimmen. Den Vorgang wollen wir an einem Beispiel darstellen.

Berechnet werden soll der theoretische kumulierte Häufigkeitswert für den logarithmischen Wert der Mengenkompente $\lg 25 = 1.3979$ bei $\mu = 2.5680$ und $\sigma = 0.8752$. Wir ermitteln zuerst das

$$\lambda = \frac{\lg 25 - \mu}{\sigma} = \frac{1.3979 - 2.5680}{0.8752} = -1.34$$

Den entsprechenden kumulierten Wahrscheinlichkeitswert für $\lambda = -1.34$ können wir aus einer von $-\infty$ bis λ kumulierten Tabelle einer Gauss' schen Normalverteilung ablesen; er ist 0.0901.³⁸

Damit haben wir die Überlegungen zur Ermittlung der empirischen kumulierten und der theoretischen kumulierten Verteilung abgeschlossen und kommen nun zur Gegenüberstellung durch den Kolmogorov-Smirnov-Test.

Beim Kolmogorov-Smirnov-Test wird für jeden logarithmischen Wert der Mengenkompente die Differenz der kumulierten Wahrscheinlichkeitswerte gebildet. Die maximale absolute Differenz dient der Prüfung, ob empirische und theoretische Verteilung wesentlich verschieden sind oder nicht. Der Test-Wert $\epsilon_{0.05}$ zur Prüfung der maximalen Differenz ist für den Kolmogorov-Smirnov-Test, bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % und bei gegebenen Parame-

³⁷ Vgl. BENNETT, C.A., FRANKLIN, N.L.: Statistical Analysis in Chemistry and Chemical Industry, New York 1954, S.86

³⁸ Vgl. BENNETT, C.A., FRANKLIN, N.L., a.a.O., S.689

tern der theoretischen Verteilung, definiert als:

$$(17) \quad \varepsilon_{0.05} = 1.36 \cdot g^{-1/2}$$

dabei ist g die Zahl der berechneten Differenzen. Ist der Absolutwert für eine oder mehrere der Differenzen grösser $\varepsilon_{0.05}$, so werden beide Verteilungen als wesentlich verschieden angesehen. Das heisst, es kann nicht angenommen werden, dass die Werte der Mengenkompente eine Stichprobe aus einer logarithmisch-normalverteilten Grundgesamtheit darstellen.

Bei geschätzten Parametern der theoretischen Verteilung jedoch, wie in unserem Fall, ist bei einer Ablehnung des Tests für absolute Differenzen grösser $\varepsilon_{0.05}$ die Irrtumswahrscheinlichkeit nicht gleich, sondern kleiner 5 %.

(Vgl. S. 44)

Die Ablehnung des Tests kann als Ursache haben:

a) wir haben einen Fehlschluss gemacht und eine richtige Hypothese als falsch abgelehnt (Fehler 1. Art) oder

b) es liegt der Mengenkompente ein anderes als das logarithmisch-normale Verteilungsgesetz zu Grunde.

Sind alle Absolutwerte der Differenzen beim Kolmogorov-Smirnov-Test kleiner oder gleich $\varepsilon_{0.05}$, so wird der Unterschied zwischen theoretischer und empirischer Verteilung als zufällig angesehen. D.h., es wird der Hypothese, dass die Werte der Mengenkompente eine Stichprobe aus einer Grundgesamtheit mit logarithmisch-normalem Verteilungsgesetz sind, nicht widersprochen. In Tabelle 11 wird der Kolmogorov-Smirnov-Test im einzelnen durchgeführt. Spalte 1 enthält die logarithmischen Werte der Mengenkompente v_i , ($i=1 \dots 40$), der Grösse nach geordnet.

Zur Berechnung der λ_i -Werte der theoretischen kumulierten Verteilung werden in Spalte 2 die Differenzen $v_i - \mu$ und in Spalte 3 die λ_i -Werte bestimmt nach Formel (11):

$$\lambda_i = \frac{v_i - \mu}{\sigma}$$

In Spalte 4 werden aus einer Tabelle³⁹ die Werte der kumulierten Wahrscheinlichkeiten von $-\infty$ bis λ_i bestimmt; es ergibt sich die theoretische kumulierte Verteilung für die logarithmischen Werte der Mengenkompente. In Spalte 5

³⁹ Vgl. BENNETT, C.A., FRANKLIN, N.L., a. a. O., S. 689

Tabelle 11: Arbeitstabelle zur Durchführung des Kolmogorov-Smirnov-Tests

Spalte 1 v_i	Spalte 2 $v_i - \mu$	Spalte 3 λ_i	Spalte 4 theoret. Verteilung	Spalte 5 empirische Verteilung	Spalte 6 Differenzen
0.3010	-2.2670	-2.5903	0.0048	0.0250	0.0202
0.4771	-2.0909	-2.3891	0.0084	0.0500	0.0416
0.6990	-1.8690	-2.1355	0.0162	0.0750	0.0588
1.0000	-1.5680	-1.7916	0.0367	0.1000	0.0633
1.3979	-1.1701	-1.3370	0.0901	0.1250	0.0349
1.3979	-1.1701	-1.3370	0.0901	0.1500	0.0599
1.6990	-0.8690	-0.9929	0.1611	0.1750	0.0139
1.9590	-0.6090	-0.6958	0.2420	0.2000	0.0420
2.0000	-0.5680	-0.6490	0.2578	0.2250	0.0328
2.1761	-0.3919	-0.4478	0.3264	0.2500	0.0764
2.3010	-0.2670	-0.3051	0.3783	0.2750	0.1033
2.3010	-0.2670	-0.3051	0.3783	0.3000	0.0783
2.3979	-0.1701	-0.1944	0.4247	0.3250	0.0997
2.4771	-0.0909	-0.1039	0.4602	0.3500	0.1102
2.4771	-0.0909	-0.1039	0.4602	0.3750	0.0852
2.4771	-0.0909	-0.1039	0.4602	0.4000	0.0602
2.4771	-0.0909	-0.1039	0.4602	0.4250	0.0352
2.4771	-0.0909	-0.1039	0.4602	0.4500	0.0102
2.6021	0.0341	0.0390	0.5160	0.4750	0.0410
2.6990	0.1310	0.1497	0.5596	0.5000	0.0596
2.7404	0.1724	0.1970	0.5713	0.5250	0.0542
2.7597	0.1917	0.2190	0.5871	0.5500	0.0371
2.9890	0.4210	0.4810	0.6844	0.5750	0.1094
3.0000	0.4320	0.4936	0.6879	0.6000	0.0879
3.0512	0.4832	0.5521	0.7088	0.6250	0.0838
3.0969	0.5289	0.6043	0.7257	0.6500	0.0757
3.1303	0.5623	0.6425	0.7389	0.6750	0.0639
3.1761	0.6081	0.6948	0.7549	0.7000	0.0549
3.1761	0.6081	0.6948	0.7549	0.7250	0.0299
3.1833	0.6153	0.7030	0.7580	0.7500	0.0080
3.3010	0.7330	0.8375	0.7995	0.7750	0.0245
3.3222	0.7542	0.8617	0.8051	0.8000	0.0051
3.3674	0.7994	0.9134	0.8186	0.8250	0.0064
3.3979	0.8299	0.9482	0.8289	0.8500	0.0211
3.3979	0.8299	0.9482	0.8289	0.8750	0.0461
3.4301	0.8621	0.9850	0.8389	0.9000	0.0611
3.4393	0.8713	0.9955	0.8413	0.9250	0.0837
3.4914	0.9234	1.0551	0.8554	0.9500	0.0946
3.6532	1.0852	1.2399	0.8925	0.9750	0.0825
3.8228	1.2548	1.4337	0.9236	1.0000	0.0764

haben wir die empirische kumulierte Verteilung der logarithmischen Werte der Mengenkomponente und in Spalte 6 die Differenzen zwischen empirischer und theoretischer Verteilung.

Die maximale Differenz bei der Durchführung des Kolmogorov-Smirnov-Tests ergibt sich mit 0.1102. Bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von kleiner 5 % und einer Zahl von $g = 40$ Testwerten widerspricht eine maximale Differenz von kleiner oder gleich $\epsilon_{0.05}$ nicht der Vermutung, dass sich beide Verteilungen nur zufällig unterscheiden. Nach Formel (17) ergibt sich:

$$\epsilon_{0.05} = 1.36 \cdot 40^{-1/2} = 0.2150.$$

Da die maximale Differenz 0.1102 kleiner als 0.2150 ist, wird die Abweichung der empirischen von der theoretischen Verteilung als zufällig angesehen, d.h. wir dürfen die Verteilung der Werte der Mengenkomponente als logarithmisch-normal ansehen.

Für die Mengenkomponente dürfen wir so annehmen:

- a) Zufallsverteilung und
- b) als Verteilungsgesetz eine logarithmische Normalverteilung

mit den Parametern μ und σ .

Damit ist auch die Mengenkomponente neben der Komponente der Bestellfolge definiert.

373 Zusammenfassung

Wir haben unter dem Gliederungspunkt 34 gezeigt, wie eine zufallsverteilte Nachfragereihe in eine Komponente der Bestellfolge und eine Mengenkomponente zerlegt werden kann, haben unter 35 und 36 geprüft, ob die Komponenten zufallsverteilt sind und unter 37 ihre Verteilungsgesetze bestimmt. Wenn wir nun fragen, durch wieviel Parameter der von uns untersuchte Typ einer zufallsverteilten Nachfragereihe charakterisiert werden kann, so lautet die Antwort: 3.

Es sind dies:

- a) die Wahrscheinlichkeit P der Bestelltage in der Komponente der Bestellfolge;
- b) der Mittelwert μ der logarithmischen Werte der Mengenkomponente;
- c) die mittlere quadratische Abweichung σ der logarithmischen Werte der Mengenkomponente.

Von diesen 3 Parametern ausgehend können wir nun entgegengesetzt dem induktiven Weg von der Nachfragereihe zu den Parametern, den deduktiven Weg von den Parametern zu einer zufallsverteilten Nachfragereihe gehen, d.h. wir können mit Hilfe von Zufallszahlen und den 3 Parametern eine zufallserzeugte Nachfragereihe bilden.

38 BILDUNG EINER ZUFALLSERZEUGTEN NACHFRAGEREIHEN

381 Begriff der zufallserzeugten Nachfragereihe

Unter einer zufallserzeugten Nachfragereihe ist eine aus mathematisch-statistischen Verteilungen und Zufallszahlen gebildete Nachfragereihe zu verstehen, die bei konstantem Bildungsgesetz eine beliebige Zeitstrecke haben kann. Je länger die zufallserzeugten Nachfragereihen sind, um so mehr der möglichen Erscheinungsformen des Bildungsgesetzes, d.h. für unser Beispiel, um so mehr der möglichen Kombinationen in der zeitlichen Folge der Bestelltage und Nichtbestelltage und der Tagesbestellmengen grösser Null können dargestellt werden.

Wir müssen unterscheiden zwischen einem praktischen Untersuchungszeitraum, der für unser Beispiel durch eine Nachfragereihe von 150 Werktagen gebildet wird⁴⁰, und einem theoretischen Untersuchungszeitraum, für den mit Hilfe der Zufallszahlen und der ermittelten Verteilungsgesetze eine Nachfragereihe erzeugt wird. Wie bei der Lösungsmethode für das Modellproblem noch näher auszuführen ist, benötigen wir für eine exakte Lösung einen langen theoretischen Untersuchungszeitraum.

Die zufallserzeugte Nachfragereihe wurde bei der Durchführung der Untersuchung mit Hilfe einer elektronischen Rechenanlage gebildet. Wir wollen deshalb zuerst darstellen, nach welchem Prinzip auf der Rechenanlage Zufallszahlen entstehen, und dann, wie die Tagesbestellmengen der Nachfragereihe im einzelnen zu berechnen sind.⁴¹

382 Zufallszahlen

Die Zufallszahlen werden in der elektronischen Rechenanlage durch ein addi-

⁴⁰ Vgl. unter 321

⁴¹ Die Bildung von Zufallszahlen, die Berechnung der Tagesbestellmengen und die Berechnung der Kosten für das im folgenden darzustellende Modell wurden in einem Maschinenprogramm zusammengefasst.

tives Programm⁴² erzeugt. Das Programm geht von 16 9-stelligen Zufallszahlen aus, die kleiner 134217727⁴³ und grösser Null sind. Die 17. Zufallszahl wird gebildet, indem die 16. und die 1. Zufallszahl addiert werden und geprüft wird, ob die Summe den Wert 134217727 übersteigt. Übersteigt sie den Wert nicht, so stellt sie die 17. Zufallszahl dar. Übersteigt die Summe den Wert, so wird von ihr 134217727 subtrahiert und die Differenz als 17. Zufallszahl genommen. Allgemein ist die (n+1). Zufallszahl:

$$(18) \quad x_{n+1} = (x_n + x_{n-15}) \bmod 134217727$$

d. h.

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-15} \quad \text{wenn } (x_n + x_{n-15}) \leq 134217727 \quad \text{und}$$

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-15} - 134217727 \quad \text{wenn } (x_n + x_{n-15}) > 134217727$$

Wir erhalten durch dieses Programm 9-stellige Zufallszahlen. Die grösste mögliche Zufallszahl ist dabei 134217727 und die kleinste mögliche gleich Eins.

Weitere Ausführungen, wie z. B. Tests, die für das Programm durchgeführt wurden, sind beschrieben in: The Journal of the Association for Computing Machinery, October 1959, S. 527.

383 Die Entstehung der zufallserzeugten Nachfragereihe im einzelnen

Bei der Erzeugung einer zufallsverteilten Nachfragereihe gehen wir in zwei Schritten vor. Wir bilden mit Hilfe von Zufallszahlen für jeden Tag des theoretischen Untersuchungszeitraums zunächst den Wert der Komponente der Bestellfolge.

Für die Komponente der Bestellfolge dürfen wir annehmen, dass sie zufallsverteilt ist und die Wahrscheinlichkeit für einen Bestelltag $P = 0,27$ hat (vgl. S. 53), d. h. dass bei der Bildung einer Komponente der Bestellfolge über Zufallszahlen 27 % der Werte Bestelltage und 73 % Nichtbestelltage sein sollen. Um diese Forderung zu erfüllen, bestimmen wir für unser Zufallszahlenprogramm im Bereich von Null bis 134217727 eine Zufallszahlengrenze G so,

⁴² Die Erzeugung der Zufallszahlen beruht auf der Addition anderer gegebener Zufallszahlen.

⁴³ $134217727 = 2^{27} - 1$; dieser Wert ist die obere Grenze des auf Binärzahlen aufbauenden Zufallszahlenprogramms für eine Grossrechenanlage IBM 704.

dass von Null bis G 27 % aller möglichen Zufallszahlen liegen. Als Grenze G ergibt sich:

$$G = 134\,217\,727 \cdot 0,27 = 36\,238\,386$$

Tritt eine Zufallszahl grösser G auf, so haben wir das Ereignis Nichtbestelltag zu registrieren. Die Tagesbestellmenge ist Null. Tritt eine Zufallszahl kleiner oder gleich G auf, so haben wir das Ereignis Bestelltag, und es ist für diesen der Wert der Mengenkompente zu bestimmen.

Für die Mengenkompente dürfen wir annehmen, dass sie nach einer logarithmischen Normalverteilung zufallsverteilt ist, mit $\mu = 2,5680$ und $\sigma = 0,8752$. (Vgl. S. 53). Ihr Verteilungsgesetz ist als integrierte logarithmische Normalverteilung durch Formel (16) definiert:

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda} \exp\left(-\left(\frac{r^2}{2}\right)\right) \cdot dr; \quad \lambda = \frac{v - \mu}{\sigma}$$

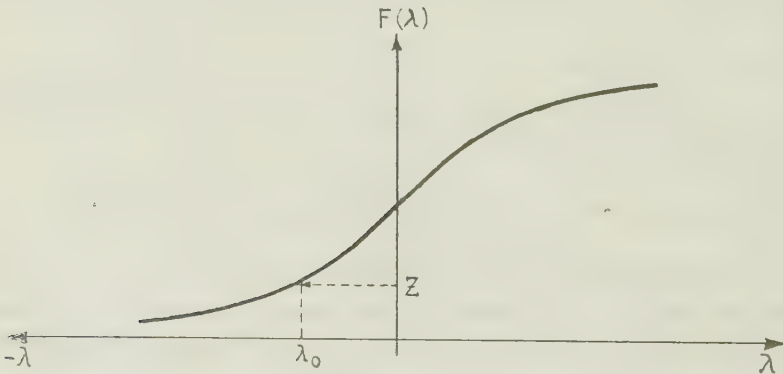


Abbildung 9: Bestimmung von λ_0 einer integrierten logarithmischen Normalverteilung für eine Zufallszahl Z

Zur Bestimmung der Bestellmenge der Bestelltage wird eine Zufallszahl Z zwischen 0 und 1 gebildet⁴⁴, die als Integral der standardisierten Normalverteilung von $-\infty$ bis λ_0 aufgefasst wird.⁴⁵ Da die Verteilung und die untere Grenze

⁴⁴ Die Zufallszahl Z zwischen 0 und 1 wird gebildet, indem eine mögliche Zufallszahl des Programms zwischen 0 und 134 217 727 durch 134 217 727 geteilt wird.

⁴⁵ Vgl. SASIENI, M., YASPER, A., FRIEDMAN, L.: Operations Research, New York 1959, S. 58, 59

des Integralbereiches $(-\infty)$ gegeben sind, ist λ_0 für jede Zufallszahl zwischen 0 und 1 definiert. Ist die Zufallszahl z. B. 0.88 493, so kann aus einer Tabelle⁴⁶ der kumulierten Wahrscheinlichkeiten einer Normalverteilung (von $-\infty$ bis λ_0 kumuliert) zu 0.88 493 ein $\lambda_0 = 1.20$ abgelesen werden. λ_0 dient der Ermittlung der logarithmierten Bestellmenge aus der Beziehung

$$\lambda_0 = \frac{v - \mu}{\sigma}$$

oder $v = \sigma \cdot \lambda_0 + \mu$. Vgl. Formeln (11) und (12). $v = \log z$ wird entlogarithmiert und ergibt die Tagesbestellmenge grösser Null.

Die Tagesbestellmengen können als Werte gleich Null und grösser Null in beliebig langer Folge als zufallserzeugte Nachfragerreihe angeordnet werden.

384 Ein Beispiel einer zufallserzeugten Nachfragerreihe

Für $P = 0.27$, $\mu = 2.5680$ und $\sigma = 0.8752$ erhalten wir für eine Periode von 250 Werktagen die in Tabelle 12 dargestellte zufallserzeugte Nachfragerreihe. Die Werte sind hier nur eine für 250 Tage zufällige Erscheinungsform des gegebenen Bildungsgesetzes.

Mit den nun abgeschlossenen allgemeinen Ausführungen zur Erfassung der Nachfrage und der betrieblichen Bedingungen sind die Voraussetzungen geschaffen für die Modellbildung und eine Modelluntersuchung mit Hilfe der Simulationstechnik und der mathematischen Analysis.

⁴⁶ BENNETT, C. A., FRANKLIN, N. L., a. a. O., S. 689

Tabelle 12: Zufallserzeugte Reihen von Tagesbestellungen

Woche	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag
1	0	0	0	2 889	0
2	0	2 093	0	285	0
3	0	1 120	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	334	0	0
6	0	0	0	0	0
7	22	0	1 399	37	749
8	0	795	0	0	0
9	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0
11	17	0	0	0	0
12	0	17	0	263	0
13	0	0	0	0	1 316
14	0	0	0	0	33
15	0	0	71	0	0
16	58	8 239	0	2 889	0
17	0	0	0	0	0
18	0	0	0	186	0
19	0	0	12 836	0	0
20	0	273	5 732	0	0
21	0	993	19	44	0
22	0	0	0	0	0
23	0	0	0	132	0
24	96	0	0	0	0
25	0	0	0	263	0
26	0	0	72	0	0
27	812	5 080	0	2 223	0
28	0	0	0	0	0
29	0	2 179	0	0	0
30	0	23	0	0	13 364
31	0	0	0	108	14 486
32	0	780	0	0	0
33	0	0	0	5 288	149
34	0	0	0	104	0
35	0	0	625	0	146
36	296	0	0	1 034	0
37	2	0	0	812	75
38	0	0	41 313	0	0
39	10 079	14	0	0	0
40	0	0	0	5 506	32
41	0	0	11 374	15	0
42	0	237	0	0	0
43	0	0	0	21	10
44	26	0	82	0	0
45	0	0	0	0	268
46	0	0	0	0	0
47	0	0	0	0	6 735
48	0	0	0	490	862
49	0	0	0	0	0
50	0	0	0	0	0

4 BILDUNG EINES MODELLS ZUR BESTIMMUNG VON OPTIMALER MINDESTLOSGRÖSSE UND LAGERERNEUERUNGSGRENZE

41 ZUR EINFÜHRUNG

Unter Modell verstehen wir in dieser Arbeit die Nachbildung des Geschehens in einem Betrieb. Das Ziel der Modellbildung liegt darin, die betrieblichen Zusammenhänge unter Berücksichtigung der gegebenen betrieblichen Bedingungen aufzuzeigen, um damit die Grundlage zur Bestimmung von optimaler Mindestlosgrösse und Lagererneuerungsgrenze für die im Betrieb gefertigten Produkte zu geben.

Der Abschnitt 4 enthält im einzelnen:

- a) den Modellablauf vom Bestelleingang bis zur Auslieferung der Bestellmengen an die Kunden;
- b) die theoretische Bestimmung der Kosten je produzierter Einheit im Modell und die Formulierung der Zielfunktion (vgl. S. 68);
- c) die praktische Durchführung der Kostenermittlung im Modell mit Hilfe der Simulationstechnik;
- d) die Ableitung einer Kostenfunktion für die Abhängigkeit der Kosten je produzierter Einheit von der Mindestlosgrösse X und der Lagererneuerungsgrenze Y ;
- e) eine Ableitung zur Bestimmung der optimalen Kombination von Mindestlosgrösse und Lagererneuerungsgrenze;
- f) und schliesslich eine Diskussion der praktischen Bedeutung und der Anwendungsmöglichkeiten des Modellergebnisses.

42 DER MODELLABLAUF

421 Zur Gliederung

Für die Darstellung des Modellablaufs hat es sich aus Gründen der Übersichtlichkeit als zweckmässig erwiesen, zu trennen zwischen Modellüberlegungen für Gross- und Kleinbestellmengen. Als Grossbestellmengen werden dabei Tagesbestellmengen grösser oder gleich der Mindestlosgrösse X und als Kleinbestellmengen Tagesbestellmengen kleiner als die Mindestlosgrösse X bezeichnet. Ferner wird die sowohl für den Modellablauf der Gross- als auch der Kleinbestellmengen gleiche Bestimmung von Zeitmengenbestand und Zeitmen-

gendefizit in einem besonderen Punkt behandelt.

Die verwendeten Symbole, die teilweise schon im Abschnitt 2 definiert wurden, sind im Anhang (vgl. S.87) zusammengestellt. Die Mindestlosgrösse sei X , die Lagererneuerungsgrenze Y und die Tagesbestellungen seien z_t ($t=1 \dots N$); N gibt dabei die Länge des Untersuchungszeitraumes an.

422 Der Modellablauf für Grossbestellungen

Für Grossbestellungen z_t grösser oder gleich X wird ein Auftrag in Höhe von z_t bei Bestelleingang unmittelbar zur Produktion gegeben. Wir nennen diese Aufträge Direktaufträge und bezeichnen sie mit dem Symbol M_t ; der Index t besagt, dass der Direktauftrag am Tag t erteilt wird. Es gilt:

$$(19) \quad M_t = z_t \quad \text{für } z_t \geq X$$

Nach der konstanten Produktionsdauer T wird die produzierte Menge unmittelbar an die Kunden ausgeliefert. So werden bei Grossbestellungen die Lagergrösse E_t und die Dispositionsgrösse P_t nicht berührt; auch Massnahmen zur Wiederauffüllung des Lagers sind bei der Lieferung der Bestellmengen direkt über die Produktion nicht notwendig.

Fragen wir, wie sich Lager- und Dispositionsgrösse verändern können, wenn die Tagesbestellmenge grösser oder gleich der Mindestlosgrösse ist, so gilt:

a) Die Lagergrösse E_t kann nur durch einen Lagereingang verändert werden:⁴⁷

$$(20) \quad E_t = E_{t-1} + A_{t-T}$$

b) Die Dispositionsgrösse P_t bleibt unverändert:⁴⁸

$$(21) \quad P_t = P_{t-1}$$

Durch die Erteilung des Direktauftrags M wird die Zahl aller Aufträge und damit die Zahl der Umstellungen in der Produktion für einen Zeitraum um 1 erhöht. Als Zählgrösse der Umstellungen führen wir die Variable ϕ_t ein, die für

⁴⁷ Vgl. unter 22, S.7 die Veränderungsmöglichkeiten der Lagergrösse; eine Veränderung durch eine Tagesbestellmenge z_t kleiner X entfällt beim Modellablauf für z_t grösser oder gleich X .

⁴⁸ Vgl. unter 22, S.8 die Veränderungsmöglichkeiten der Dispositionsgrösse; eine Veränderung durch eine Tagesbestellmenge z_t kleiner X entfällt beim Modellablauf für z_t grösser oder gleich X .

den Fall, dass am Tage t ein Auftrag erteilt wird, den Wert 1 und für den Fall, dass kein Auftrag erteilt wird, den Wert 0 hat. War die Zahl der Umstellungen in dem untersuchten Zeitraum bis zum Vortage $t-1$ gleich C_{t-1} , so ergibt sich die Zahl der Umstellungen bei Erteilung eines Direktauftrages am Tag t :

$$(22) \quad C_t = C_{t-1} + \varphi_t = C_{t-1} + 1$$

Die Produktionsmengen eines Zeitraumes erhalten wir durch Kumulieren aller Auftragsmengen; durch den Direktauftrag M_t wird die Produktionsmenge des Zeitraums bis zum Vortag K_{t-1} um M_t erhöht:

$$(23) \quad K_t = K_{t-1} + M_t$$

Für den Modellablauf bei z_t grösser oder gleich X wären nun die Grössen Zeitmengenbestand (B_t) und Zeitmengendefizit (S_t) zu behandeln. Da aber das Prinzip ihrer Entstehung für den Modellablauf bei z_t grösser oder gleich X und z_t kleiner X gleich ist, wird es für beide Modellabläufe in einem besonderen Abschnitt, im Anschluss an den Modellablauf für z_t kleiner X , dargestellt.

423 Der Modellablauf für Kleinbestellmengen

Die Belieferung einer Kleinbestellmenge z_t kleiner X erfolgt ab Lager.

Die Erteilung eines Direktauftrages scheidet damit aus. Es kann also nur ein Lagerauftrag A_t entstehen. Bei der Belieferung von Kleinbestellmengen ist eine Änderung sowohl der Lager- als auch der Dispositionsgrösse möglich. Wir stellen nun die Frage: Welche Veränderungen können Lager- und Dispositionsgrösse erfahren, wenn die Tagesbestellmenge kleiner als die Mindestlosgrösse ist? Es gilt:

a) Die Lagergrösse kann durch eine Tagesbestellmenge z_t kleiner X und durch einen Lagereingang verändert werden:⁴⁹

$$(24) \quad E_t = E_{t-1} - z_t + A_{t-T}$$

b) Die Veränderung der Dispositionsgrösse ist nur durch eine Tagesbestellmenge z_t kleiner X und durch die Erteilung eines Lagerauftrages möglich.⁵⁰

⁴⁹ Vgl. unter 22, S. 7 die Veränderungsmöglichkeiten der Lagergrösse.

⁵⁰ Vgl. unter 22, S. 8 die Veränderungsmöglichkeiten der Dispositionsgrösse.

Wie die Veränderungen im einzelnen entstehen, ist in 2 Schritten zu erklären. Die Dispositionsgrösse am Tage t ergibt sich zunächst, wenn wir die Dispositionsgrösse des Tages $t-1$ um z_t kleiner X vermindern. Es gilt:

$$(25) \quad P_t = P_{t-1} - z_t$$

Da der hier berechnete Wert P_t , wie sich im weiteren Modellablauf zeigen wird, noch nicht als endgültig angesehen werden kann, wollen wir ihn mit P_t^* bezeichnen und es gilt an Stelle der Gleichung (25):

$$(25a) \quad P_t^* = P_{t-1} - z_t$$

Je nach dem Verhältnis der Dispositionsgrösse P_t^* zu der Lagererneuerungsgrenze Y sind nun zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Für P_t^* grösser Y gilt:

es wird kein Lagerauftrag ausgestellt, da die Dispositionsgrösse als hinreichend gross angesehen wird; das bedeutet, die Grösse des Lagerauftrags am Tage t ist Null:

$$(26) \quad A_t = 0$$

Die Dispositionsgrösse P_t^* erfährt durch einen Lagerauftrag keine weitere Veränderung und es gilt:

$$(27) \quad P_t = P_t^*;$$

die Produktionsmenge und die Zahl der Umstellungen bleiben gegenüber dem Vortag unverändert:

$$(28) \quad K_t = K_{t-1}$$

$$(29) \quad C_t = C_{t-1} + \mathcal{G}_t = C_{t-1} + 0 = C_{t-1}^{51}$$

b) Für P_t^* kleiner oder gleich Y gilt:

die Dispositionsgrösse wird nicht mehr als hinreichend gross angesehen und es wird ein Lagerauftrag A_t der Produktion erteilt. Er setzt sich, wie bereits in den organisatorischen Bedingungen festgelegt wurde,⁵² aus der Mindestlosgrösse X und der Menge, um die die Dispositionsgrösse die Lagererneuerungsgrenze unterschreitet, zusammen.

$$(30) \quad A_t = X + Y - P_t^*$$

⁵¹ $\mathcal{G}_t = 0$, wenn kein Auftrag ausgestellt wird

⁵² Vgl. Abschnitt 22

Da durch die Erteilung des Auftrags die erwarteten Lagereingänge erhöht werden, ist der Wert der Dispositionsgrösse am Tage t entsprechend zu korrigieren;

$$(31) \quad P_t = P_t^* + A_t$$

Die Produktionsmenge verändert sich um A_t ; die Zahl der Umstellungen um $S_t = 1$;

$$(32) \quad K_t = K_{t-1} + A_t$$

$$(33) \quad C_t = C_{t-1} + S_t = C_{t-1} + 1^{53}$$

Zur Vervollständigung der Ausführungen zu den Modellabläufen, für z_t grösser oder gleich X und z_t kleiner X , ist nun noch die für beide Modellabläufe gleiche Bestimmung des Zeitmengenbestandes und des Zeitmengendefizits anzufügen.

424 Bestimmung der Grössen Zeitmengenbestand und Zeitmengendefizit

Für den Zeitmengenbestand in einem Zeitraum bis zum Tage t führen wir das Symbol B_t und für das Zeitmengendefizit bis zum Tage t das Symbol S_t ein. Der Zeitmengenbestand eines Zeitraumes wird bestimmt durch die Lagerbestände (E_t grösser oder gleich Null); das Zeitmengendefizit durch Lagerdefizite (E_t kleiner Null). Danach unterscheiden wir zwei Wege bei der Berechnung der Zeitmengengrössen.

Ist E_t grösser oder gleich Null, so ist der Zeitmengenbestand bis zum Tage t , (B_t), gleich dem Zeitmengenbestand bis zum Vortage (B_{t-1}), vermehrt um den Lagerbestand des Tages t :

$$(34) \quad B_t = B_{t-1} + E_t$$

Das Zeitmengendefizit S_t bleibt bei E_t grösser oder gleich Null gegenüber dem Vortage unverändert;

$$(35) \quad S_t = S_{t-1}$$

Ist E_t kleiner Null, so bleibt der Zeitmengenbestand gegenüber dem Vortage unverändert;

$$(36) \quad B_t = B_{t-1}$$

und das Zeitmengendefizit bis zum Tage t ist gleich dem Zeitmengendefizit bis

⁵³ Vgl. ebenso Formel (22)

zum Vortage (S_{t-1}) vermehrt um den absoluten Wert des Lagerdefizits:

$$(37) \quad S_t = S_{t-1} + |E_t| \quad (\text{für } E_t < 0)$$

Die Modellabläufe für z_t grösser oder gleich X und z_t kleiner X sind allgemein für den Tag t dargestellt. Bei der Untersuchung eines theoretischen Zeitraums N gilt für $t = 1 \dots N$, d.h. es müssen für jeden der N Tage des Untersuchungszeitraums die Entscheidungen im Modell sowie die Veränderungen der Modellgrößen bestimmt werden. Als Ergebnis erhalten wir am Tage N zur Kostenermittlung die kostenverursachenden Größen: C_N , K_N , B_N und S_N . Es ist nun noch ein Spezialfall für den Modellablauf, nämlich der Modellbeginn am Tage $t=1$, zu berücksichtigen.

425 Zum Beginn des Modellablaufs

Für den Modellbeginn interessiert die Frage, welche Werte die Modellgrößen E_0 , P_0 , K_0 , C_0 , B_0 , S_0 , $A_{1-T} \dots A_{t-T}$ annehmen sollen. Es gibt hier zwei Möglichkeiten:

- a) wir übernehmen Werte aus dem Betriebsablauf, für den das Modell gebildet wird, oder
- b) wir setzen alle Werte gleich Null.

Den Fall a) werden wir wählen, wenn nur sehr kurze Zahlenreihen zur Untersuchung zur Verfügung stehen und sich die Ausgangswerte stark auf das Ergebnis auswirken. Haben wir dagegen längere Zahlenreihen zur Verfügung, so verlieren die Ausgangswerte mit zunehmender Reihenlänge ihren Einfluss auf das Ergebnis und wir können deshalb die Ausgangswerte vernachlässigen und gleich Null setzen.

Mit diesen Ausführungen ist die Formulierung des Modellablaufs abgeschlossen. Das Ergebnis wird zur Übersicht in einem Ablaufdiagramm zusammengefasst.

426 Ablaufdiagramm

Im Ablaufdiagramm (vgl. Abbildung 10) werden die Ausführungen zum Modellablauf zu einem symbolischen Modell zusammengefasst. Die Kreise stellen dabei Anfangs- und Endpunkt des Diagramms dar. Durch die Rauten werden logische Verzweigungen angegeben. Die Rechtecke enthalten Rechenoperationen,

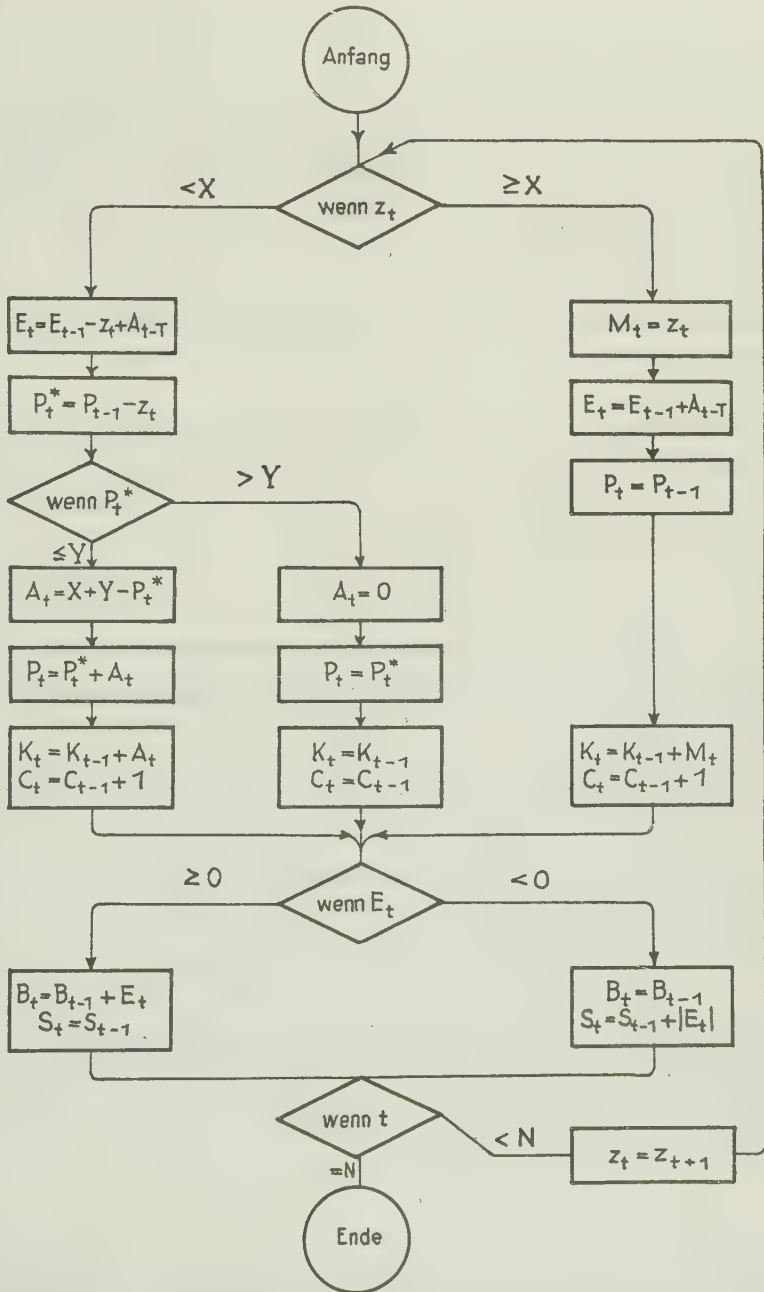


Abbildung 10: Ablaufdiagramm

d.h. für dieses Beispiel, es werden Grössen gleich gesetzt oder Additionen bzw. Subtraktionen durchgeführt.

Zum "Anfang" des Modellablaufs erfolgt die Eingabe der Ausgangswerte. Durch die erste Raute des Diagramms wird dann angezeigt, dass für Gross- und Kleinbestellmengen verschiedene Modellabläufe zu beachten sind. Im Modellablauf für Kleinbestellmengen erfolgt nochmals eine Verzweigung, nämlich in Wege mit und ohne Erteilung eines Lagerauftrages. Für den Modellablauf für Grossbestellmengen besteht eine solche Verzweigung nicht; er führt immer zu einer Auftragserteilung. Gemeinsam für die erwähnten Modellabläufe erfolgt wiederum eine Verzweigung bei der Bestimmung von Zeitmengenbestand und Zeitmengendefizit.

Der Modellablauf ist mit der Ermittlung der Zeitmengengrössen für einen Tag durchgeführt. Er stellt das Prinzip zur Untersuchung aller Tagesbestellmengen z_t eines theoretischen Zeitraums N dar, für $t=1 \dots N$. Es muss deshalb nach dem Modellablauf jedes Tages geprüft werden, ob das Ende des zu untersuchenden Zeitraums schon erreicht ist. Ist t kleiner N , ist die Modelluntersuchung mit der Tagesbestellmenge des nächsten Tages z_{t+1} fortzusetzen. Ist t gleich N , ist der Modellablauf für den theoretischen Untersuchungszeitraum abgeschlossen.

Ein Zahlenbeispiel zum Modellablauf wird an späterer Stelle noch gegeben. (Vgl. unter 442.)

Im Anschluss an die Formulierung des Modellablaufs wollen wir nun zu den Kostenüberlegungen übergehen.

43 THEORETISCHE BESTIMMUNG DER KOSTEN JE PRODUZIERTER EINHEIT UND FORMULIERUNG DER ZIELFUNKTION

431 Die Kosten je produzierter Einheit für einen Zeitraum N

Für den Modellablauf ergeben sich am Ende eines Zeitraums N für eine bestimmte Reihe von Tagesbestellmengen z_t ($t=1 \dots N$) und vorgegebene Werte von X und Y als kostenverursachende Grössen: C_N , K_N , B_N und S_N .⁵⁴

⁵⁴ Die kostenverursachenden Grössen sind kumulative Grössen ab Beginn des theoretischen Untersuchungszeitraums. Vgl. S. 64

Bei Kenntnis der Kostensätze;⁵⁵

α = Umstellkostensatz,

β = losproportionaler Kostensatz je produzierter Einheit,

γ = Kostensatz des Zeitmengenbestandes,

δ = Kostensatz des Zeitmengendefizits,

sind für den Zeitraum N die Gesamtkosten G_N wie folgt zu berechnen:

$$(38) \quad G_N = C_N \cdot \alpha + K_N \cdot \beta + B_N \cdot \gamma + S_N \cdot \delta$$

Die Kosten je produzierter Einheit g_N sind

$$(39) \quad g_N = \frac{C_N \cdot \alpha}{K_N} + \beta + \frac{B_N \cdot \gamma}{K_N} + \frac{S_N \cdot \delta}{K_N}$$

Diese Kostenüberlegung ist der Ausgangspunkt für die Formulierung der Zielfunktion.

432 Die Zielfunktion

Kehren wir zurück zur Fragestellung des Modells; sie lautet: Mindestlosgrösse X und Lagererneuerungsgrenze Y sind so festzulegen, dass die Kosten je produzierter Einheit minimiert werden. Für die Grössen X und Y besteht als weitere Bedingung nur, dass sie grösser Null sein sollen.

Wie für eine bestimmte Kombination von X und Y in einem Zeitraum N die Kosten je produzierter Einheit zu bestimmen sind, wurde bereits ausgeführt.

Berücksichtigen wir nun, dass die Werte X und Y variable Werte X_j und Y_i annehmen können, so gilt für einen Zeitraum N, wenn wir die Symbole der Modellgrössen und der Kostengrösse je produzierter Einheit für die möglichen Kombinationen von X_j und Y_i mit den Indizes j und i kennzeichnen:

$$(40) \quad g_{N \cdot ij} = \frac{C_{N \cdot ij} \cdot \alpha}{K_{N \cdot ij}} + \beta + \frac{B_{N \cdot ij} \cdot \gamma}{K_{N \cdot ij}} + \frac{S_{N \cdot ij} \cdot \delta}{K_{N \cdot ij}}$$

Die Indizes seien $j=1 \dots n$; $i=1 \dots m$; wobei n und m beliebige ganze Zahlen grösser Null sind.

⁵⁵ Vgl. S.14 und S.18

Es besteht die Forderung, das Minimum der $g_{N \cdot ij}$ -Werte zu suchen und die ihm zugeordneten Koordinaten zu bestimmen, die wir mit X_0 und Y_0 bezeichnen. Bringen wir diesen Zusammenhang in eine mathematische Formulierung, so gilt:

$$(41) \quad g_{N \cdot ij} = f(X_j, Y_i)$$

$$(42) \quad g_{N \cdot ij} \longrightarrow \text{Minimum}$$

Die Beziehung (42) bezeichnen wir dabei als Zielfunktion.

433 Vereinfachung der Zielfunktion

Aus der Beziehung (40)

$$g_{N \cdot ij} = \frac{C_{N \cdot ij} \cdot \alpha}{K_{N \cdot ij}} + \beta + \frac{B_{N \cdot ij} \cdot \gamma}{K_{N \cdot ij}} + \frac{S_{N \cdot ij} \cdot \delta}{K_{N \cdot ij}}$$

ist zu ersehen, dass die Kosten je produzierter Einheit einen konstanten Kostenanteil enthalten; für jede Kombination von X_j und Y_i sind die losproportionalen Kosten je produzierter Einheit konstant gleich β .

Stellen wir uns die $g_{N \cdot ij}$ -Werte in Abhängigkeit von X_j und Y_i im 3-dimensionalen Raum als Fläche vor, so verändern sich die dem Kostenminimum zugeordneten Koordinaten nicht, wenn wir alle $g_{N \cdot ij}$ -Werte um eine Konstante vermindern. Das heisst aber, wir brauchen für die Bestimmung der optimalen Kombination von Mindestlosgrösse und Lagererneuerungsgrenze die losproportionalen Kosten nicht zu berücksichtigen. Die um die proportionalen Kosten je produzierter Einheit verminderten Kosten je produzierter Einheit bezeichnen wir im folgenden als "verminderte Kosten je produzierter Einheit" $g'_{N \cdot ij}$ (für einen Zeitraum N und die Kombinationen von X_j und Y_i) und es gilt:

$$(43) \quad g'_{N \cdot ij} = g_{N \cdot ij} - \beta = \frac{C_{N \cdot ij} \cdot \alpha}{K_{N \cdot ij}} + \frac{B_{N \cdot ij} \cdot \gamma}{K_{N \cdot ij}} + \frac{S_{N \cdot ij} \cdot \delta}{K_{N \cdot ij}}$$

Wir können die verminderten Kosten je produzierter Einheit in Abhängigkeit von X_j und Y_i in einer Tabelle darstellen:

Tabelle 13: Verminderte Kosten je produzierter Einheit als Funktion von X_j und Y_i

	X_1	X_2	$\dots X_j$	$\dots X_n$
Y_1	$g'_{N \cdot 11}$	$g'_{N \cdot 12}$	$\dots g'_{N \cdot 1j}$	$\dots g'_{N \cdot 1n}$
Y_2	$g'_{N \cdot 21}$	$g'_{N \cdot 22}$	$\dots g'_{N \cdot 2j}$	$\dots g'_{N \cdot 2n}$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
Y_i	$g'_{N \cdot i1}$	$g'_{N \cdot i2}$	$\dots g'_{N \cdot ij}$	$\dots g'_{N \cdot in}$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
Y_m	$g'_{N \cdot m1}$	$g'_{N \cdot m2}$	$\dots g'_{N \cdot mj}$	$\dots g'_{N \cdot mn}$

Zur Bestimmung des Minimums der $g'_{N \cdot ij}$ -Werte und der Koordinaten X_0 und Y_0 dürfen wir die Zielfunktion nun vereinfacht formulieren:

$$(44) \quad g'_{N \cdot ij} = f(X_j, Y_i)$$

$$(45) \quad g'_{N \cdot ij} \longrightarrow \text{Minimum}$$

44 PRAKTISCHE BESTIMMUNG DER VERMINDERTEN KOSTEN JE PRODUZIERTER EINHEIT

441 Zur Simulationstechnik

HARLING⁵⁶ schreibt zum Begriff der Simulationstechnik; "By simulation is meant the technique of setting up a stochastic model of a real situation and then performing sampling experiments upon the model. The feature which distinguishes a simulation from sampling experiments in the classical sense is that of the stochastic model. Whereas a classical sampling experiment in statistics is most often performed directly upon raw data, a simulation entails first of all the construction of an abstract model of the system to be studied."

⁵⁶ HARLING, J.: Simulation Techniques in Operations Research - A Review, The Journal of the Operations Research Society of America, Vol. 6, 1958, S. 307

Über die Anwendung der Simulationstechnik schreibt ROBINSON⁵⁷: "In many cases where complex relationships, both of predictable and random natures, occur, it is easier to set up and run through a simulated situation, than it is to develop and use a mathematical model representing the entire process under study. ... The calculation of the probability of the combined sequence of activities spilling over into each other and interacting, in what is sometimes referred to as cascading effect, leads into very deep mathematical waters in the field of Stochastic Process. ... To avoid an impossible or unprofitable attempt to solve a complex operation using equations to seek so-called optimal answers, we turn to a simulation of the system such that we may repeatedly experiment and obtain statistically reliable empirical results. ... In addition, simulation techniques can tackle problems that are too cumbersome to be handled analytically."

Die mathematische Erfassung der wahrscheinlichkeitstheoretischen Zusammenhänge unseres Modells würde eine Anwendung mathematisch komplizierter Methoden notwendig machen, die wir jedoch vermeiden wollen. Wir begehen deshalb den Weg einer verhältnismässig einfachen Lösung mit Hilfe der Simulationstechnik.

Das Prinzip einer Lösung mit Hilfe der Simulationstechnik besteht darin, durch Bildung und Untersuchung von Stichprobenwerten, die Modellzusammenhänge zu erfassen. Wir betrachten dabei die über Zufallszahlen gebildeten Werte der Tagesbestellmengen als Stichprobenwerte aus einer Grundgesamtheit, die durch die Parameter P , μ und σ charakterisiert werden kann (vgl. S. 53). Das zu untersuchende Modell ist unter 42 formuliert. Es sind damit, für die im folgenden darzustellende Lösung, die beiden Merkmale "sampling experiments" und "stochastic model"⁵⁸ gegeben, die nach HARLING die Simulationstechnik kennzeichnen.

In unserem Modell kann, für eine zufallserzeugte Nachfragerreihe und bei vorgegebener Mindestlosgrösse und Lagererneuerungsgrenze, jeder Schritt, vom

⁵⁷ ROBINSON, P. J.: System Simulation Helps Solve Complex Operations, SAE Journal, Society of Automotive Engineers, February 1958, S. 88

⁵⁸ Wenn wir hier von einem stochastischen Modell sprechen, so bedeutet das, dass den variablen Modellgrössen für die Untersuchung bestimmte Wahrscheinlichkeiten zugeordnet sind.

Bestelleingang bis zur Auslieferung der Bestellmengen an die Kunden, "simuliert" und der Kostenwert je produzierter Einheit (vgl. S. 68) für einen theoretischen Untersuchungszeitraum bestimmt werden. Ein Beispiel dazu ergibt sich im folgenden Abschnitt bei der Bestimmung der verminderten Kosten je produzierter Einheit, und zwar zunächst für eine einzige Kombination von Mindestlosgrösse und Lagererneuerungsgrenze.

442 Bestimmung der verminderten Kosten je produzierter Einheit für eine Kombination von Mindestlosgrösse und Lagererneuerungsgrenze

Gegeben sei eine zufallserzeugte Nachfragerreihe⁵⁹ mit der Länge $N = 13$:

0 10 0 0 4 5 0 6 0 3 1 0 2

Für sie sollen bei einer gegebenen Kombination von Mindestlosgrösse X und Lagererneuerungsgrenze Y die verminderten Kosten je produzierter Einheit nach dem unter 42 gebildeten Modell bestimmt werden. Gegeben sind:

Mindestlosgrösse	$X = 7,$
Lagererneuerungsgrenze	$Y = 4,$
Produktionsdauer	$T = 3,$
Kostensätze	$\alpha = 100,$
	$\gamma = 1,$
	$\delta = 2;$

ferner gelten die Bedingungen im Anhang zu Abschnitt 2 (vgl. S. 22).

Wir haben Formel (43) zur Bestimmung der verminderten Kosten je produzierter Einheit bereits abgeleitet; sie lautet für den Fall mehrerer möglicher Kombinationen von X_j und Y_i bei einem Zeitraum N :

$$g'_{N \cdot ij} = \frac{C_{N \cdot ij} \cdot \alpha}{K_{N \cdot ij}} + \frac{B_{N \cdot ij} \cdot \gamma}{K_{N \cdot ij}} + \frac{S_{N \cdot ij} \cdot \delta}{K_{N \cdot ij}}$$

Es sei für eine bestimmte Kombination von X und Y :

$$(46) \quad g'_N = \frac{C_N \cdot \alpha}{K_N} + \frac{B_N \cdot \gamma}{K_N} + \frac{S_N \cdot \delta}{K_N}$$

⁵⁹ Es wird hier von dem bisherigen Zahlenbeispiel (vgl. unter 38) abgewichen, um mit wenigen und einfachen Werten übersichtlich das Prinzip der Simulation darstellen zu können. Wir kehren unter 444 zu dem alten Zahlenbeispiel zurück.

Die Werte α , γ und δ sind gegeben; zu bestimmen sind C_N , B_N , S_N und K_N . Wir erhalten sie durch Simulation. Dabei gilt für den Modellablauf das Ablaufdiagramm unter 426, dessen Regeln mechanisch für die Simulation angewendet werden können.

Die Werte der Lager- und der Dispositionsgrösse sowie Zeitmengenbestand und Zeitmengendefizit seien zu Beginn des Modellablaufs gleich Null.

$$E_0 = P_0 = B_0 = S_0 = 0$$

Die Zahl der Umstellungen in der Produktion und die Produktionsmenge seien ebenfalls Null.

$$C_0 = K_0 = 0$$

Ausserdem wird bei Modellbeginn angenommen, dass kein Lagereingang von der Produktion erwartet wird, d.h., dass in den ersten T Tagen keine Auftragsmenge als Lagereingang zu erwarten ist. Es gilt:

$$A_{1-T} = A_{2-T} = \dots = A_{T-T} = 0,$$

oder speziell für das gebildete Beispiel:

$$A_{1-3} = A_{2-3} = A_{3-3} = 0$$

Die Zusammenstellung auf den Seiten 73 und 74 enthält den Modellablauf für 13 Tage gemäss dem Ablaufdiagramm in Abbildung 10.

Der Modellablauf kann graphisch so dargestellt werden, dass der Verlauf aller kostenverursachenden Grössen des Modells erfasst ist. Die Grössen Zeitmengenbestand B_t und Zeitmengendefizit S_t ⁶⁰ sind in Verbindung mit dem Modellablauf für Kleinbestellmengen in Abbildung 11 dargestellt. Die Grössen Produktionsmenge K_t und Zahl der Umstellungen C_t sind gemeinsam für die Modellabläufe für Klein- und Grossbestellmengen in Abbildung 12 dargestellt.

Wir erhalten als kostenverursachende Grössen am Ende des Zeitraumes $N = 13$:

$$B_{13} = 39; \quad S_{13} = 4; \quad C_{13} = 4; \quad K_{13} = 39.$$

Die verminderten Kosten je produzierter Einheit sind zu berechnen nach Formel (46):

$$g'_{13} = \frac{C_{13} \cdot \alpha}{K_{13}} + \frac{B_{13} \cdot \gamma}{K_{13}} + \frac{S_{13} \cdot \delta}{K_{13}} = 11,08$$

⁶⁰ Da für Grossbestellmengen kein Lager gehalten wird, entstehen Zeitmengenbestand und Zeitmengendefizit nur beim Modellablauf für Kleinbestellmengen. (Vgl. unter 422 und 423.)

8. Tag

$$\begin{aligned} z_6 &= 6; \\ \text{da } z_6 < X \text{ ist } M_6 &= 0 \\ E_6 &= E_7 - z_6 + A_{6-3} = 2 - 6 + 0 = -4 \\ P_6^* &= P_7 - z_6 = 11 - 6 = 5; \\ \text{da } P_6^* &> Y \\ A_6 &= 0 \\ P_6 &= P_6^* = 5 \\ K_6 &= K_7 = 30 \\ C_6 &= C_7 = 3; \\ \text{da } E_6 &< 0 \\ B_6 &= B_7 = 22 \\ S_6 &= S_7 + |E_7| = 0 + |-4| = 4 \end{aligned}$$

10. Tag

$$\begin{aligned} z_{10} &= 3; \\ \text{da } z_{10} < X \text{ ist } M_{10} &= 0 \\ E_{10} &= E_9 - z_{10} + A_{10-3} = 5 - 3 = 2 \\ P_{10}^* &= P_9 - z_{10} = 5 - 3 = 2; \\ \text{da } P_{10}^* &\leq Y \\ A_{10} &= X + Y - P_{10}^* = 7 + 4 - 2 = 9 \\ P_{10} &= P_{10}^* + A_{10} = 2 + 9 = 11 \\ K_{10} &= K_9 + A_{10} = 30 + 9 = 39 \\ C_{10} &= C_9 + \varphi_{10} = 3 + 1 = 4; \\ \text{da } E_{10} &\geq 0 \\ B_{10} &= B_9 + E_{10} = 27 + 2 = 29 \\ S_{10} &= S_9 = 4 \end{aligned}$$

12. Tag

$$\begin{aligned} z_{12} &= 0; \\ \text{da } z_{12} < X \text{ ist } M_{12} &= 0 \\ E_{12} &= E_{11} - z_{12} + A_{12-3} = 1 - 0 + 0 = 1 \\ P_{12}^* &= P_{11} - z_{12} = 10 - 0 = 10; \\ \text{da } P_{12}^* &> Y \\ A_{12} &= 0 \\ P_{12} &= P_{12}^* = 10 \\ K_{12} &= K_{11} = 39 \\ C_{12} &= C_{11} = 4; \\ \text{da } E_{12} &\geq 0 \\ B_{12} &= B_{11} + E_{12} = 30 + 1 = 31 \\ S_{12} &= S_{11} = 4 \end{aligned}$$

9. Tag

$$\begin{aligned} z_9 &= 0; \\ \text{da } z_9 < X \text{ ist } M_9 &= 0 \\ E_9 &= E_8 - z_9 + A_{9-3} = -4 - 0 + 9 = 5 \\ P_9^* &= P_8 - z_9 = 5 - 0 = 5; \\ \text{da } P_9^* &> Y \\ A_9 &= 0 \\ P_9 &= P_9^* = 5 \\ K_9 &= K_8 = 30 \\ C_9 &= C_8 = 3; \\ \text{da } E_9 &\geq 0 \\ B_9 &= B_8 + E_9 = 22 + 5 = 27 \\ S_9 &= S_8 = 4 \end{aligned}$$

11. Tag

$$\begin{aligned} z_{11} &= 1; \\ \text{da } z_{11} < X \text{ ist } M_{11} &= 0 \\ E_{11} &= E_{10} - z_{11} + A_{11-3} = 2 - 1 + 0 = 1 \\ P_{11}^* &= P_{10} - z_{11} = 11 - 1 = 10; \\ \text{da } P_{11}^* &> Y \\ A_{11} &= 0 \\ P_{11} &= P_{11}^* = 10 \\ K_{11} &= K_{10} = 39 \\ C_{11} &= C_{10} = 4; \\ \text{da } E_{11} &\geq 0 \\ B_{11} &= B_{10} + E_{11} = 29 + 1 = 30 \\ S_{11} &= S_{10} = 4 \end{aligned}$$

13. Tag

$$\begin{aligned} z_{13} &= 2; \\ \text{da } z_{13} < X \text{ ist } M_{13} &= 0 \\ E_{13} &= E_{12} - z_{13} + A_{13-3} = 1 - 2 + 9 = 8 \\ P_{13} &= P_{12} - z_{13} = 10 - 2 = 8; \\ \text{da } P_{13}^* &> Y \\ A_{13} &= 0 \\ P_{13} &= P_{13}^* = 8 \\ K_{13} &= K_{12} = 39 \\ C_{13} &= C_{12} = 4; \\ \text{da } E_{13} &\geq 0 \\ B_{13} &= B_{12} + E_{13} = 31 + 8 = 39 \\ S_{13} &= S_{12} = 4 \end{aligned}$$

Zusammenstellung des Modellablaufs für ein Beispiel von 13 Tagen

1. Tag

$$\begin{aligned} z_1 &= 0; \\ \text{da } z_1 < X \text{ ist } M_1 &= 0 \\ E_1 &= E_0 - z_1 + A_{1,3} = 0 - 0 + 0 = 0 \\ P_1^* &= P_0 - z_1 = 0 - 0 = 0 \\ \text{da } P_1^* &\leq Y \\ A_1 &= X + Y - P_1^* = 7 + 4 - 0 = 11 \\ P_1 &= P_1^* + A_1 = 0 + 11 = 11 \\ K_1 &= K_0 + A_1 = 0 + 11 = 11 \\ C_1 &= C_0 + \varphi_1 = 0 + 1 = 1; \\ \text{da } E_1 &\geq 0 \\ B_1 &= B_0 + E_1 = 0 + 0 = 0; \\ S_1 &= S_0 \end{aligned}$$

2. Tag

$$\begin{aligned} z_2 &= 10; \\ \text{da } z_2 \geq X \text{ ist } A_2 &= 0 \\ M_2 &= 10 \\ E_2 &= E_1 + A_{2,3} = 0 + 0 = 0 \\ P_2 &= P_1 = 11 \\ K_2 &= K_1 + M_2 = 11 + 10 = 21 \\ C_2 &= C_1 + \varphi_2 = 1 + 1 = 2; \\ \text{da } E_2 &\geq 0 \\ B_2 &= B_1 + E_2 = 0 + 0 = 0 \\ S_2 &= S_1 = 0 \end{aligned}$$

3. Tag

$$\begin{aligned} z_3 &= 0; \\ \text{da } z_3 < X \text{ ist } M_3 &= 0 \\ E_3 &= E_2 - z_3 + A_{3,3} = 0 - 0 + 0 = 0 \\ P_3^* &= P_2 - z_3 = 11 - 0 = 11; \\ \text{da } P_3^* &> Y \\ A_3 &= 0 \\ P_3 &= P_3^* = 11 \\ K_3 &= K_2 = 21 \\ C_3 &= C_2 = 2; \\ \text{da } E_3 &\geq 0 \\ B_3 &= B_2 + E_3 = 0 + 0 = 0 \\ S_3 &= S_2 = 0 \end{aligned}$$

4. Tag

$$\begin{aligned} z_4 &= 0; \\ \text{da } z_4 < X \text{ ist } M_4 &= 0 \\ E_4 &= E_3 - z_4 + A_{4,3} = 0 - 0 + 11 = 11 \\ P_4^* &= P_3 - z_4 + A_{4,3} = 0 - 0 + 11 = 11; \\ \text{da } P_4^* &> Y \\ A_4 &= 0 \\ P_4 &= P_4^* = 11 \\ K_4 &= K_3 = 21 \\ C_4 &= C_3 = 2; \\ \text{da } E_4 &\geq 0 \\ B_4 &= B_3 + E_4 = 0 + 11 = 11 \\ S_4 &= S_3 = 0 \end{aligned}$$

5. Tag

$$\begin{aligned} z_5 &= 4; \\ \text{da } z_5 < X \text{ ist } M_5 &= 0 \\ E_5 &= E_4 - z_5 + A_{5,3} = 11 - 4 + 0 = 7 \\ P_5^* &= P_4 - z_5 = 11 - 4 = 7 \\ \text{da } P_5^* &> Y \\ A_5 &= 0 \\ P_5 &= P_5^* = 7 \\ K_5 &= K_4 = 21 \\ C_5 &= C_4 = 2; \\ \text{da } E_5 &\geq 0 \\ B_5 &= B_4 + E_5 = 11 + 7 = 18 \\ S_5 &= S_4 = 0 \end{aligned}$$

6. Tag

$$\begin{aligned} z_6 &= 5; \\ \text{da } z_6 < X \text{ ist } M_6 &= 0 \\ E_6 &= E_5 - z_6 + A_{6,3} = 7 - 5 + 0 = 2 \\ P_6^* &= P_5 - z_6 = 7 - 5 = 2; \\ \text{da } P_6^* &\leq Y \\ A_6 &= X + Y - P_6^* = 7 + 4 - 2 = 9 \\ P_6 &= P_6^* + A_6 = 2 + 9 = 11 \\ K_6 &= K_5 + A_6 = 21 + 9 = 30 \\ C_6 &= C_5 + \varphi_6 = 2 + 1 = 3; \\ \text{da } E_6 &\geq 0 \\ B_6 &= B_5 + E_6 = 18 + 2 = 20 \\ S_6 &= S_5 = 0 \end{aligned}$$

7. Tag

$$\begin{aligned} z_7 &= 0; \\ \text{da } z_7 < X \text{ ist } M_7 &= 0 \\ E_7 &= E_6 - z_7 + A_{7,3} = 2 - 0 + 0 = 2 \\ P_7^* &= P_6 - z_7 = 11 - 0 = 11; \\ \text{da } P_7^* &> Y \\ A_7 &= 0 \\ P_7 &= P_7^* = 11 \\ K_7 &= K_6 = 30 \\ C_7 &= C_6 = 3; \\ \text{da } E_7 &\geq 0 \\ B_7 &= B_6 + E_7 = 20 + 2 = 22 \\ S_7 &= S_6 = 0 \end{aligned}$$

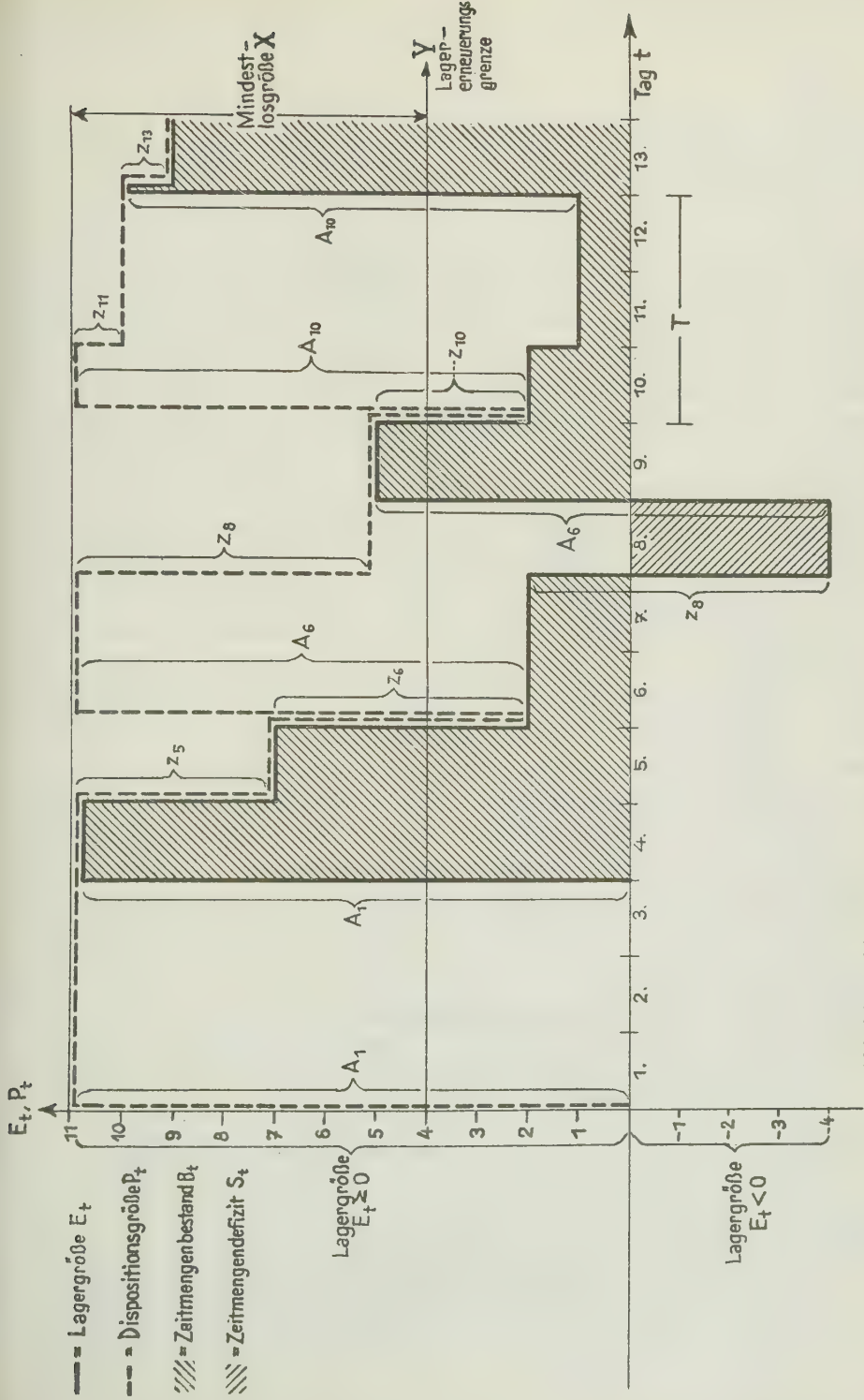


Abbildung 11: Entstehung der kostenverursachenden Grössen Zeitmengenbestand B_t und Zeitmengendefizit S_t beim Modellablauf für Kleinbestellungen

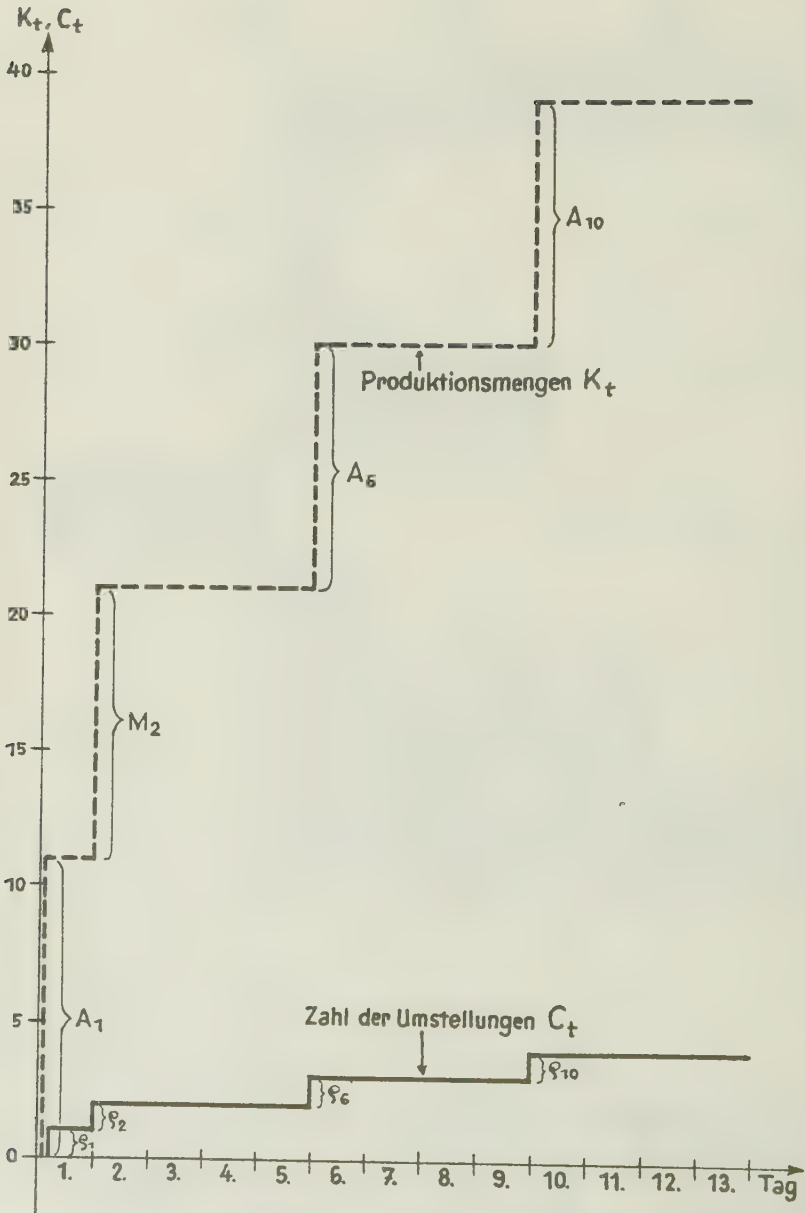


Abbildung 12: Verlauf der kostenverursachenden Grössen Produktionsmenge K_t und Zahl der Umstellungen in der Produktion C_t für die Modellabläufe der Klein- und Grossbestellmengen

443 Bestimmung der verminderten Kosten je produzierter Einheit für mehrere Kombinationen von Werten der Mindestlosgrösse und der Lagererneuerungsgrenze

Haben wir die verminderten Kosten je produzierter Einheit für eine bestimmte Kombination von Mindestlosgrösse und Lagererneuerungsgrenze ermittelt, so ist das Prinzip für die Bestimmung der verminderten Kosten je produzierter Einheit für mehrere Kombinationen von Werten der Mindestlosgrösse und der Lagererneuerungsgrenze gegeben. Betrachten wir die Werte der Mindestlosgrösse und der Lagererneuerungsgrenze als Variable X_j und Y_i , so können wir Kombinationen dieser Werte bilden und für jede einzelne der Kombinationen, nach dem unter 22 beschriebenen Verfahren, die verminderten Kosten je produzierter Einheit bestimmen. Es besteht hier die Frage: wie sollen die Kombinationen gewählt werden? Für alle möglichen Kombinationen die Kostenwerte zu berechnen, würde zu viel Rechenarbeit sein. Wir können deshalb nur eine beschränkte Zahl von Kostenwerten berechnen und müssen diese so bestimmen, dass sie einen Aufschluss über die Abhängigkeit der verminderten Kosten je produzierter Einheit von X_j und Y_i geben. Vor allem interessieren die Bereiche von X_j und Y_i , in welchen das Kostenminimum liegen kann. Aus diesem Grund ist es eine bedeutende Erleichterung für die Bestimmung der optimalen Kombination von X_j und Y_i , wenn man bereits Schätzwerte und so einen Anhaltspunkt für die Grössenordnung der Werte der Optimalkombination besitzt. Hat man keine Schätzwerte, müssen diese durch Probieren ermittelt werden. Je nach Zuverlässigkeit der Schätzwerte können die möglichen Kombinationen für das Optimum weiter oder enger eingegrenzt werden. Es ist eine Frage der Genauigkeit, wie gross die Abstände zwischen den X_j - und Y_i -Werten gewählt werden sollen, d.h. wie viele Kostenwerte in diesem Bereich zu bestimmen sind. Allgemein gilt: je grösser der Bereich und je mehr berechnete Kostenwerte um so besser der Aufschluss über den Ort des Optimums. Die Werte für X_j und Y_i können in gleichen oder ungleichen Abständen angeordnet sein. Stellen wir uns die X_j - und Y_i -Werte auf Koordinatenachsen abgetragen vor, so kann für die Kombinationen der X_j - und Y_i -Koordinaten, bei einem bestimmten Zeitraum N , ein "Gitter" von Kostenwerten $g'_{N,ij}$ in der dritten Dimension bestimmt werden, das einen Anhaltspunkt gibt über den Zusammenhang der verminderten Kosten je produzierter Einheit und den Variablen X_j und Y_i .

Die Frage, wie gross der theoretische Untersuchungszeitraum N gewählt werden soll, wird im folgenden Abschnitt behandelt.

444 Einfluss der Länge des theoretischen Untersuchungszeitraums auf die verminderten Kosten je produzierter Einheit

Wir können bei der Bestimmung der verminderten Kosten je produzierter Einheit folgendes Experiment durchführen. Bestimmen wir zuerst die verminderten Kosten je produzierter Einheit für eine bestimmte X_j - Y_i -Kombination und einen theoretischen Untersuchungszeitraum $N/8$: $g'_{N/8, ij}$. Dann verdoppeln wir den Zeitraum und bestimmen für $N/4$ die verminderten Kosten je produzierter Einheit und erhalten ein $g'_{N/4, ij}$ ungleich $g'_{N/8, ij}$. Setzen wir die Verlängerung des Zeitraumes um $N/8$ Tage weiter fort und vergleichen die aufeinanderfolgenden verminderten Kostenwerte je produzierter Einheit, so kann empirisch festgestellt werden, dass die Differenzen mit steigender Länge des Untersuchungszeitraumes geringer werden, d. h. mit steigender Länge des theoretischen Untersuchungszeitraumes konvergieren die Kosten je produzierter Einheit für eine bestimmte Kombination von X_j und Y_i gegen einen Grenzwert. Dieser Effekt ist daraus zu erklären, dass bei der Mittelwertbildung für die verminderten Kosten je produzierter Einheit, die durch die Zufallsverteilung der Tagesbestellmengen verursachten Schwankungen, bei steigender Länge des theoretischen Untersuchungszeitraumes, an Einfluss verlieren. Dazu ein Schaubild:

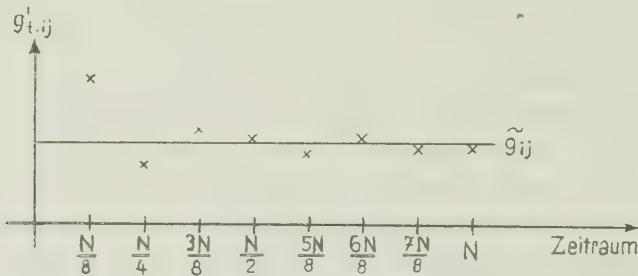


Abbildung 13: Konvergenz der verminderten Kosten je produzierter Einheit bei zunehmender Länge des theoretischen Untersuchungszeitraums

Bei Konvergenzuntersuchungen von zufallsverteilten Nachfragereihen, die ähnlich der Nachfragereihe des von uns zu untersuchenden Produktes waren, wurde festgestellt, dass, bei einer Genauigkeit von 5 %, eine Länge des theoretischen Untersuchungszeitraumes von 10 800 Tagen genügt. D. h. gegenüber dem Grenzwert $\tilde{g}_{ij}$, der als Schätzwert aus einem Zeitraum von 14 400 Tagen berechnet

wurde, wick bei der Konvergenzuntersuchung für keine der X_j - Y_i -Kombinationen der Wert der verminderten Kosten je produzierter Einheit, bei einem Zeitraum von 10800 Tagen ($g'_{10800,ij}$), um mehr als 5 % von $\widetilde{g}_{ij}$ ab. Wenn wir von einem theoretischen Zeitraum bis zu 10800 Tagen sprechen, ist das so zu verstehen, dass zur Ermittlung der Modellzusammenhänge 10800 zufallserzeugte Tagesbestellmengen notwendig sind. Es handelt sich hier bei der Bildung des theoretischen Untersuchungszeitraums um eine Lösungsmethode des Modellproblems.

Das Zahlenmaterial für das praktische Beispiel in dieser Arbeit wird nur für einen theoretischen Untersuchungszeitraum $N = 2160$ Tagen berechnet. Da es sich hier um eine Sonderuntersuchung handelt, wird aus Wirtschaftlichkeitsüberlegungen heraus darauf verzichtet, als Konvergenzbedingung einen Zeitraum von 10800 Tagen festzulegen. Die Zahlen für 2160 Tage erfüllen den gleichen Zweck für die Darstellung der Lösung unseres Optimierungsproblems wie die Werte bei einer Konvergenzbedingung von 10800 Tagen.

445 Bestimmung der verminderten Kosten je produzierter Einheit für das praktische Beispiel

Ausgangspunkt der Untersuchung ist eine zufallserzeugte Nachfragereihe, die sich aus zwei zufallsverteilten Komponenten, einer Komponente der Bestellfolge mit dem Parameter $P = 0,27$ und einer Mengenkomponente mit den Parametern $\mu = 2,5680$ und $\sigma = 0,8752$ der logarithmischen Normalverteilung zusammensetzt⁶¹. Die Länge des theoretischen Untersuchungszeitraums ist 2160 Tage. Für diese Nachfragereihe soll für das unter 42 gebildete Modell die optimale Kombination von Mindestlosgrösse und Lagererneuerungsgrenze bestimmt werden.

Als Modellbedingungen gelten:

Produktionsdauer $T = 15$,

Kostensätze $\alpha = 400$,

$\gamma = 0,0006$,

$\delta = 0,0005$,

ferner gelten die Bedingungen im Anhang zu Abschnitt 2 (vgl. S.21).

⁶¹ Die Entstehung der zufallserzeugten Nachfragereihe ist im einzelnen unter 38 behandelt.

Für die Lösung des Modellproblems stehen auf Grund von praktischen Erfahrungen ermittelte Schätzwerte für die optimale Kombination von Mindestlosgrösse und Lagererneuerungsgrenze zur Verfügung. Der Wert der Mindestlosgrösse sei $X_0 = 17\,600$ und der Wert der Lagererneuerungsgrenze $Y_0 = 4\,600$.

Als Werte der Lagererneuerungsgrenze zur Eingrenzung des Kostenminimums legen wir das $\frac{1}{8}$ -, $\frac{1}{4}$ -, $\frac{1}{2}$ -, 1- und $1\frac{1}{2}$ -fache von Y_0 fest, so dass sich 575, 1150, 2300, 4600 und 6900 als Y_i -Werte ergeben; für die Mindestlosgrösse nehmen wir das $\frac{1}{4}$ -, $\frac{1}{2}$ -, 1- und 2fache von X_0 und erhalten als X_j -Werte 4400, 8800, 17600 und 35200. Für die zufallserzeugte Nachfragerreihe kann zu den möglichen X_j - und Y_i -Kombinationen simulativ nach dem unter 442 beschriebenen Prinzip ein "Kostengitter" bestimmt werden. Bei der Simulation auf der Rechenanlage ergaben sich die in Tabelle 14 dargestellten verminderten Kosten je produzierter Einheit.

Tabelle 14: Verminderte Kosten je produzierter Einheit als Funktion von X_j und Y_i für eine zufallserzeugte Reihe von Tagesbestimmungsmengen bei $P = 0,27$; $\mu = 2.5680$; $\sigma = 0,8752$ und $N = 2\,160$

$X_j \backslash Y_i$	575	1 150	2 300	4 600	6 900
4 400	0,034 21	0,033 56	0,033 11	0,034 06	0,035 59
8 800	0,029 04	0,028 39	0,027 66	0,027 32	0,027 79
17 600	0,026 59	0,026 20	0,025 64	0,025 07	0,025 24
35 200	0,028 68	0,028 55	0,028 44	0,028 54	0,028 82

Das "Kostengitter" bildet den Ausgangspunkt für die mathematische Analysis zur Bestimmung einer Kostenfunktion und der optimalen Kombination von Mindestlosgrösse und Lagererneuerungsgrenze.

45 BESTIMMUNG EINER KOSTENFUNKTION

Es besteht die Frage, wie wir eine funktionale Beziehung zwischen den verminderten Kosten je produzierter Einheit und den Variablen Mindestlosgrösse und Lagererneuerungsgrenze feststellen können. Hier bietet sich der Weg an, die durch Simulation ermittelten verminderten Kostenwerte je produzierter Einheit durch ein Polynom zu approximieren. Die Ergebnisse der Simulation lassen die Vermutung zu, dass die Kostenfunktion durch eine "Kostenfläche" charakterisiert wird, die die Form einer Schale aufweist. Es wird deshalb ein Polynom

3. Grades als hinreichend zur Approximation angesehen.

Durch dieses Verfahren werden zufällige Schwankungen der über Zufallszahlen ermittelten Kostenwerte je produzierter Einheit ausgeglichen. Für die später durchzuführende Kostenminimierung ist das insofern von Bedeutung als keine durch Zufallsschwankungen der Kostenwerte bedingte "Scheinminimas" auftreten.

Wir ersetzen in den folgenden Ausführungen die errechneten verminderten Kostenwerte je produzierter Einheit des "Kostengitters" ($g'_{N \cdot ij}$ -Werte) durch eine Variable mit einem laufenden Index, e_i , wobei alle $g'_{N \cdot ij}$ durch e_i erfasst sind. So können wir von der Voraussetzung ausgehen: gegeben sind $n = 20$ Punkte e_i . Gesucht ist ein Polynom 3. Grades mit 2 Variablen (X, Y) durch diese Punkte:

$$(47) \quad e = a_0 + a_{11}X + a_{12}Y + a_{21}X^2 + a_{22}XY + a_{23}Y^2 + a_{31}X^3 + a_{32}X^2Y + a_{33}XY^2 + a_{34}Y^3$$

Bedingung für das Polynom ist, dass die Summe der quadratischen Abweichungen aller Werte des gesuchten Polynoms $e(X_i, Y_i)$ von den gegebenen errechneten Werten e_i ein Minimum ist.

$$(48) \quad \sum_{i=1}^n [e(X_i, Y_i) - e_i]^2 = \min. \quad 62$$

oder (47) in (48) eingesetzt:

$$(49) \quad \sum_i (a_0 + a_{11}X_i + a_{12}Y_i + a_{21}X_i^2 + a_{22}X_iY_i + a_{23}Y_i^2 + a_{31}X_i^3 + a_{32}X_i^2Y_i + a_{33}X_iY_i^2 + a_{34}Y_i^3 - e_i)^2 = \min.$$

Zur Auflösung ist nach den Konstanten $a_0 \dots a_{34}$ zu differenzieren; die Ableitungen sind gleich Null zu setzen. Zur Vereinfachung der Schreibweise sei:

$$(50) \quad (a_0 + a_{11}X_i + a_{12}Y_i + a_{21}X_i^2 + a_{22}X_iY_i + a_{23}Y_i^2 + a_{31}X_i^3 + a_{32}X_i^2Y_i + a_{33}X_iY_i^2 + a_{34}Y_i^3 - e_i) = f(X_i, Y_i, e_i)$$

⁶² In Zukunft werden die gleichbleibenden Summationsgrenzen für i weggelassen.

$$\begin{aligned}
 (51) \quad & \sum_i f(X_i, Y_i, e_i) \cdot 1 = 0 \\
 & \sum_i f(X_i, Y_i, e_i) \cdot X_i = 0 \\
 & \sum_i f(X_i, Y_i, e_i) \cdot Y_i = 0 \\
 & \sum_i f(X_i, Y_i, e_i) \cdot X_i^2 = 0 \\
 & \sum_i f(X_i, Y_i, e_i) \cdot X_i Y_i = 0 \\
 & \sum_i f(X_i, Y_i, e_i) \cdot Y_i^2 = 0 \\
 & \sum_i f(X_i, Y_i, e_i) \cdot X_i^3 = 0 \\
 & \sum_i f(X_i, Y_i, e_i) \cdot X_i^2 Y_i = 0 \\
 & \sum_i f(X_i, Y_i, e_i) \cdot X_i Y_i^2 = 0 \\
 & \sum_i f(X_i, Y_i, e_i) \cdot Y_i^3 = 0
 \end{aligned}$$

Führen wir als symbolische Abkürzungen ein:

$$(52) \quad \sum_i X_i^k \cdot Y_i^l = k, l$$

$$(53) \quad \sum_i X_i^k \cdot Y_i^l \cdot e_i = k, l, e,$$

so kann das Gleichungssystem in Matrixschreibweise wie folgt dargestellt werden;⁶³

0,0	1,0	0,1	2,0	1,1	0,2	3,0	2,1	1,2	0,3	a_0	=	0, 0, e
1,0	2,0	1,1	3,0	2,1	1,2	4,0	3,1	2,2	1,3	a_{11}	=	1, 0, e
0,1	1,1	0,2	2,1	1,2	0,3	3,1	2,2	1,3	0,4	a_{12}	=	0, 1, e
2,0	3,0	2,1	4,0	3,1	2,2	5,0	4,1	3,2	2,3	a_{21}	=	2, 0, e
1,1	2,1	1,2	3,1	2,2	1,3	4,1	3,2	2,3	1,4	a_{22}	=	1, 1, e
0,2	1,2	0,3	2,2	1,3	0,4	3,2	2,3	1,4	0,5	a_{23}	=	0, 2, e
3,0	4,0	3,1	5,0	4,1	3,2	6,0	5,1	4,2	3,3	a_{31}	=	3, 0, e
2,1	3,1	2,2	4,1	3,2	2,3	5,1	4,2	3,3	2,4	a_{32}	=	2, 1, e
1,2	2,2	1,3	3,2	2,3	1,4	4,2	3,3	2,4	1,5	a_{33}	=	1, 2, e
0,3	1,3	0,4	2,3	1,4	0,5	3,3	2,4	1,5	0,6	a_{34}	=	0, 3, e

Hieraus sind die gesuchten Koeffizienten $a_0 \dots a_{34}$ zu bestimmen und damit ist das Polynom definiert.

⁶³ Eine Matrix mit 10 Zeilen und 10 Spalten mit einem 10zeiligen Vektor multipliziert ergibt einen Spaltenvektor mit 10 Elementen.

Für das unter 445 aufgezeigte Kostengitter ergibt sich als Kostenfunktion:

$$(54) \quad e = 44.9465 \cdot 10^{-3} - 2.9001 \cdot 10^{-6} X - 1.0492 \cdot 10^{-6} Y + 0.1479 \cdot 10^{-9} X^2 - \\ - 0.0478 \cdot 10^{-9} XY + 0.2949 \cdot 10^{-9} Y^2 - 0.0022 \cdot 10^{-12} X^3 + \\ + 0.0017 \cdot 10^{-12} X^2Y - 0.0034 \cdot 10^{-12} XY^2 - 0.0134 \cdot 10^{-12} Y^3$$

Haben wir so die Kostenfunktion als Polynom erfasst, können wir für jede beliebige Kombination der Werte der Mindestlosgrösse und der Lagererneuerungsgrenze einen verminderten Kostenwert je produzierter Einheit errechnen. Wir müssen dazu nur die entsprechenden Werte für X und Y in die Funktion einsetzen. So sind wir durch die Approximation der einzelnen, simulierten, verminderten Kostenwerte je produzierter Einheit von einem nicht kontinuierlichen zu einem kontinuierlichen Zusammenhang zwischen den Kostenwerten und den bestimmenden Variablen gekommen.

46 MINIMIERUNG DER KOSTENFUNKTION UND BESTIMMUNG DER OPTIMALEN KOMBINATION VON MINDESTGRÖSSE UND LAGERERNEUERUNGSGRENZE

Wir bestimmen das Minimum und die dazugehörigen Koordinaten X_0 und Y_0 für die allgemein in Formel (47) formulierte Kostenfunktion:

$$e = a_0 + a_{11}X + a_{12}Y + a_{21}X^2 + a_{22}XY + a_{23}Y^2 + a_{31}X^3 + a_{32}X^2Y + a_{33}XY^2 + a_{34}Y^3$$

über das Newton-Verfahren.

Ist $f_1(X, Y)$ die 1. Ableitung der Kostenfunktion nach X,

$f_2(X, Y)$ die 1. Ableitung der Kostenfunktion nach Y,

so gilt als Bedingung für die Extremstellen:

$$(55) \quad f_1(X, Y) = 0$$

$$(56) \quad f_2(X, Y) = 0$$

$$f_1(X, Y) = a_{11} + 2a_{21}X + a_{22}Y + 3a_{31}X^2 + 2a_{32}XY + a_{33}Y^2 = 0$$

$$f_2(X, Y) = a_{12} + a_{22}X + 2a_{23}Y + a_{32}X^2 + 2a_{33}XY + 3a_{34}Y^2 = 0$$

Da die Konstanten $a_{11} \dots a_{34}$ bekannt sind, kann das Gleichungssystem nach X und Y aufgelöst werden, zur Bestimmung der Werte X_0 und Y_0 der Variablen für die Extremstellen. Für die Auflösung des Gleichungssystems nach dem Newton-Verfahren ist Voraussetzung, dass wir Schätzwerte für das Minimum kennen; sie seien X_0 und Y_0 .

Wir bezeichnen:

$$df_1(X, Y)/dX = f_{1X} = 2a_{21} + 6a_{31}X + 2a_{32}Y$$

$$df_1(X, Y)/dY = f_{1Y} = a_{22} + 2a_{32}X + 2a_{33}Y$$

$$df_2(X, Y)/dX = f_{2X} = a_{22} + 2a_{32}X + 2a_{33}Y$$

$$df_2(X, Y)/dY = f_{2Y} = 2a_{23} + 2a_{33}X + 6a_{34}Y$$

Nach der Taylor'schen Reihenentwicklung gilt:

$$(57) \quad f_1(X_i + dX, Y_i + dY) = f_1(X_i, Y_i) + f_{1X}(X_i, Y_i)dX + f_{1Y}(X_i, Y_i)dY = 0$$

$$(58) \quad f_2(X_i + dX, Y_i + dY) = f_2(X_i, Y_i) + f_{2X}(X_i, Y_i)dX + f_{2Y}(X_i, Y_i)dY = 0$$

Aufgelöst nach dX und dY ergibt sich:

$$(59) \quad dX = \frac{f_{2Y}(X_i, Y_i) \cdot f_{1X}(X_i, Y_i) - f_{2X}(X_i, Y_i) \cdot f_{1Y}(X_i, Y_i)}{f_{2X}(X_i, Y_i) \cdot f_{1Y}(X_i, Y_i) - f_{2Y}(X_i, Y_i) \cdot f_{1X}(X_i, Y_i)}$$

$$(60) \quad dY = \frac{f_{2X}(X_i, Y_i) \cdot f_{1X}(X_i, Y_i) - f_{1X}(X_i, Y_i) \cdot f_{2X}(X_i, Y_i)}{f_{2Y}(X_i, Y_i) \cdot f_{1X}(X_i, Y_i) - f_{2X}(X_i, Y_i) \cdot f_{1Y}(X_i, Y_i)}$$

Mit (59) und (60) erhalten wir für die Bestimmung der Extremstelle Werte zur Verbesserung von X_i und Y_i

$$(61) \quad X_{i+1} = X_i + dX$$

$$(62) \quad Y_{i+1} = Y_i + dY$$

$\frac{dX}{X_i}$ und $\frac{dY}{Y_i}$ sind das Mass der Veränderung der Variablen zur Verbesserung des Ergebnisses; bei einer Veränderung der Variablen um weniger als 1 % wird das Ergebnis als hinreichend genau angesehen. Durch Vergleich des Extremwertes mit den Werten der Umgebung ist festzustellen, ob es sich bei ihm um ein Maximum oder Minimum handelt.

Wir haben damit das Prinzip gezeigt, wie über Schätzwerte für X_i und Y_i , die wir als Schätzwerte der optimalen Kombination von Mindestlosgrösse und Lagererneuerungsgrenze mit X_0 und Y_0 bezeichnen, das Minimum einer Kostenfunktion mit 2 Variablen bestimmt werden kann.

Als Minimum der von uns in Formel (54) aufgeführten Kostenfunktion und damit als optimale Kombination von Mindestlosgrösse und Lagererneuerungsgrenze unseres Modellbeispiels ergibt sich:

$$X_0 = 15\,030; \quad Y_0 = 4\,528;$$

bei einem Wert der verminderten Kosten je produzierter Einheit von $e = 0.024\,79$.

47 ZUR PRAKTISCHEN ANWENDUNG

Das Modellbeispiel zeigt, wie mit verhältnismässig einfachen mathematisch-statistischen Methoden kostenoptimale Werte für die betriebliche Disposition bestimmt werden können. Es ist möglich, dabei viele betriebliche Bedingungen und Einflussfaktoren zu berücksichtigen. Das bedeutet, dass viele der in der Praxis bestehenden Interdependenzen zwischen den betrieblichen Bereichen, und speziell bei Grossunternehmungen auch zwischen den einzelnen Betrieben, im Modell untersucht werden können.

Die Optimalwerte für Mindestlosgrösse und Lagererneuerungsgrenze dienen vor allem der betrieblichen kurzfristigen Disposition. Sie werden hierbei solange als Schätzwerte für die Zukunft angesehen, als nicht wesentliche Änderungen in den betrieblichen Bedingungen, z.B. in den Nachfragegesetzmässigkeiten, auftreten bzw. erwartet werden.

Neben der Bestimmung von Optimalwerten für die betriebliche Planung können weitere Problemstellungen mit Hilfe des Modells gelöst werden, wie z.B.: Welchen Einfluss hat eine Abweichung von einem der Optimalwerte auf den Kostenwert des Ergebnisses? Es wird damit die Frage aufgeworfen, ob es für die Kostensituation des Betriebes von grosser Bedeutung ist, dass man sich streng an die errechneten Optimalwerte hält, oder ob innerhalb gewisser Bereiche Abweichungen möglich sind, ohne dass die Kosten bemerkenswert beeinflusst werden. Die Antwort zu dieser Frage können wir über die berechnete Kostenfunktion erhalten. Es sind z.B. diejenigen Kombinationen von Mindestlosgrösse und Lagererneuerungsgrenze zu bestimmen, deren Kosten je produzierter Einheit nur eine Abweichung von 1 % von dem im Optimum berechneten Kostenwert haben. Ergeben sich starke Abweichungen für die so berechneten Werte der Kombinationen von Mindestlosgrösse und Lagererneuerungsgrenze

von den Werten der Optimalkombination, so können die Planungswerte für Mindestlosgrösse und Lagererneuerungsgrenze innerhalb grösserer Spielräume festgelegt werden, ohne dass dadurch die Kosten stark beeinflusst werden. Ergeben sich dagegen nur geringe Abweichungen, so bedeutet ein Abweichen von den Werten der Optimalkombination bei der Festlegung der Planungswerte eine verhältnismässig starke Erhöhung der Kosten.

Ein weiterer Fragenbereich betrifft den Zusammenhang zwischen den betrieblichen Bedingungen und den Ergebnissen der Modelluntersuchung. Es interessiert hierbei vor allem der Einfluss von veränderlichen betrieblichen Bedingungen auf die Kosten je produzierter Einheit, die Lagererneuerungsgrenze und die Mindestlosgrösse im Kostenoptimum. Eine Antwort auf diesen Problemkreis erhalten wir, wenn wir die Modelluntersuchung für jeweils veränderte Bedingungen durchführen. Wir können so z.B. die Untersuchung unter Änderung der organisatorischen Bedingungen, der Lieferfristen oder der Parameter der Nachfragerreihe durchführen. So entsteht für ein gegebenes Optimierungsproblem eine Erweiterung dadurch, dass gewisse Bedingungen als beeinflussbar betrachtet werden und nun auch sie so festgelegt werden sollen, dass sie zusammen mit den Grössen Mindestlosgrösse und Lagererneuerungsgrenze optimal gewählt sind.

Die vorliegende Arbeit zeigt die Möglichkeiten, die eine Betriebsführung hat, sich durch die Quantifizierung betrieblicher Zusammenhänge wichtige Unterlagen für unternehmerische Entscheidungen zu schaffen. Jedoch ist für umfangreiche Modellbildungen und -untersuchungen zu beachten, dass die dabei entstehenden Kosten nicht den möglichen Nutzen übersteigen und der wirtschaftliche Erfolg gewährleistet ist.

ANHANG: Übersicht der in der Arbeit verwendeten Symbole

z_t	Tagesbestellmenge am Tag t	
v_t	logarithmischer Wert der Tagesbestellmenge am Tag t	
T	Produktionsdauer	
X	Mindestlosgrösse	} für den Fall der Betrachtung einer Kombination von X und Y
Y	Lagererneuerungsgrenze	
X_j	Mindestlosgrösse	} Für den Fall der Betrachtung mehrerer Kombinationen von X_j und Y_i
Y_i	Lagererneuerungsgrenze	
E_t	Lagergrösse am Tag t	⁶⁴
P_t^*	Dispositionsgrösse als noch nicht endgültige Grösse am Tag t	⁶⁴
P_t	Dispositionsgrösse als endgültige Grösse am Tag t	⁶⁴
B_t	Zeitmengenbestand (je Zeitraum)	⁶⁴
S_t	Zeitmengendefizit (je Zeitraum)	⁶⁴
M_t	Direktauftrag am Tag t	⁶⁴
A_t	Lagerauftrag am Tag t	⁶⁴
A_{t-T}	Lagereingang am Tag t	⁶⁴
C_t	Zahl der Umstellungen in der Produktion (je Zeitraum)	⁶⁴
φ_t	Zähler der Umstellungen in der Produktion am Tag t	⁶⁴
K_t	Produktionsmengen (je Zeitraum)	⁶⁴
α	Umstellkostensatz	
β	losproportionaler Kostensatz je produzierter Einheit	
γ	Kostensatz des Zeitmengenbestandes	
δ	Kostensatz des Zeitmengendefizits	
N	Länge des Zeitraums	
G_N	Gesamtkosten für den Zeitraum N	⁶⁴
g_N	Kosten je produzierter Einheit für den Zeitraum N	⁶⁴
g_N^*	verminderte Kosten je produzierter Einheit für den Zeitraum N	⁶⁴

⁶⁴ Für den Fall der Betrachtung mehrerer Kombinationen von X_j und Y_i wird der Index der Modellvariablen mit den Indizes i und j erweitert; j z.B. E_t wird zu $E_{t,ij}$.

"Je Zeitraum" bedeutet immer; kumuliert ab Beginn des theoretischen Untersuchungszeitraums.

LITERATURVERZEICHNIS

Abkürzungen:

- OR = The Journal of the Operations Research Society of America
MS = Management Science
JRSS = The Journal of the Royal Statistical Society
JASA = Journal of the American Statistical Association

- ANDERSON, O.: Einführung in die mathematische Statistik, Wien 1935
" : Probleme der Statistischen Methodenlehre in den Sozialwissenschaften, 3. Auflage, Würzburg 1957
ANDERSON, O. jun.: Die Saisonschwankungen in der Deutschen Stromproduktion vor und nach dem Kriege, München 1950
ANDLER, K.: Die wirtschaftliche Auftragsmenge für Fertigung und Lager, Das Industrieblatt, Heft 4 und 5, Stuttgart 1951
AITCHISON, J., BROWN, J.A.C.: The Lognormal Distribution, Cambridge 1957
ARROW, K.J., KARLIN, S., SCARF, H.: Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production, Stanford 1958
ARROW, K.J., HARRIS, J., MARSCHAK, J.: Optimal Inventory Policy, Econometrica, Vol. 19, 1951
BENNETT, C.A., FRANKLIN, N.L.: Statistical Analysis in Chemistry and Chemical Industry, New York 1954
BIRNBAUM, Z.W.: Numerical Tabulation of the Distribution of Kolmogorov's Statistic for Finite Sample Size, JASA, Vol. 47, 1952
BROWN, R.: Statistical Forecasting for Inventory Control, New York, Toronto, London 1959
CHURCHMAN, C.W., ACKOFF, R.L., ARNOFF, E.L.: Introduction to Operations Research, New York, 1957
COHEN, K.J.: Determining the Best Possible Inventory Levels, Industrial Quality Control, Vol. 15, 1958
CRAMÉR, H.: Mathematical Methods of Statistics, Princeton University 1958
DAVIS, H.T.: The Analysis of Economic Time Series, Bloomington 1941
DIXON, W.J., MASSEY, F.J.: Introduction to Statistical Analysis, New York, Toronto, London 1957
DVORETZKY, A., KIEFER, J., WOLFOWITZ, J.: The Inventory Problem, I and II, Econometrica, Vol. 20, 1952, pp 187-222, 450-456
" : On the Optimal Character of the (sS) Policy in Inventory Theory, Econometrica, Vol. 21, 1953

- FELLER, W.: An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol 1, 2, Edition, New York 1950
- FEIGL, G., ROHRBACH, H.: Einführung in die höhere Mathematik, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1953
- FISHER, R. A.: Statistical Methods for Research Workers, London 1954
- FISHER, R. A., YATES, F.: Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research, London 1957
- FRENCKNER, P. T.: Betriebswirtschaftslehre und Verfahrensforschung, Zeitschrift für handelswissenschaftliche Forschung, 9. Jg. 1957
- GAVER, D. P.: On Base-Stock Level Inventory Control, OR, Vol. 7, 1959
- GNEDENKO, B. W.: Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin 1957
- GRAF, U., HENNING, H. J.: Formeln und Tabellen der mathematischen Statistik, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1950
- GUTENBERG, E.: Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, 1. Band, Die Produktion, 5. Auflage, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1960
- HARLING, J.: Simulation Techniques in Operations Research - A Review, OR, Vol. 6, 1958
- HANSEN, M. H., HURWITZ, W. N., MADOW, W. G.: Sample Survey Methods and Theory, Vol. II, New York 1953
- HEINEN, E.: Betriebswirtschaftliche Kostenlehre, Wiesbaden 1959
- HOEL, P. G.: Introduction to Mathematical Statistics, New York 1957
- HURD, C. H.: Simulation by Computation as an Operations Research Tool, OR, Vol. 2, 1954
- JACKSON, J. R.: Simulation Research on Job Shop Production, Naval Research Logistics Quarterly, 4, 1957
- KENDALL, M. G.: The Advanced Theory of Statistics, Vol. 2, Third Edition, London 1951
- KENDALL, M. G., BUCKLAND, W. R.: A Dictionary of Statistical Terms, London 1957
- KLINGST, A.: Optimale Lagerhaltung bei bekanntem Jahresgang des Bedarfes, Unternehmensforschung, Band 1, Heft 4, 1956/57
- KELLERER, H.: Theorie und Technik des Stichprobenverfahrens, München 1953
- " : Berechnung der mittleren Verweildauer, erläutert an betriebswirtschaftlichen Vorgängen, Sonderdruck aus der Zeitschrift für handelswissenschaftliche Forschung, Heft 3, 1958
- " : Statistik im modernen Wirtschafts- und Sozialleben, Hamburg 1960
- LINDER, A.: Statistische Methoden, 2. Auflage, Basel 1951
- MAFFEI, R. B.: Simulation, Sensitivity and Management Decision Rules, Journal of Business, University of Chicago, Vol. 31

- MAGEE, J.F.: Production Planning and Inventory Control, New York, Toronto, London 1958
- MANNE, A.S.: Programming of Economic Lot Sizes, MS, Vol.4, 1958
- MASSEY, F.J. jun.: The Kolmogorov-Smirnov-Test for Goodness for Fit, JASA, Vol. 46, 1951
- NITSCHKE, J.A., LIEBEL, E.F.: Optimale Produktionsprogramme, Unternehmensforschung, Band 2, Heft 2, 1958
- PFANZAGL, J.: Allgemeine Methodenlehre der Statistik, I. Elementare Methoden unter besonderer Berücksichtigung der Anwendung in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften, Berlin 1960
- " : Über die Zerlegung statistischer Reihen, Metrika 1958
- RICHTER, H.: Wahrscheinlichkeitstheorie, Berlin, Heidelberg, Göttingen 1956
- ROBINSON, P.J.: System Simulation Helps Solve Complex Operations, SAE Journal, Society of Automotive Engineers, February 1958
- SASIENI, M., YASPAN, A., FRIEDMAN, L.: Operations Research, New York 1959
- SCHLAIFER, R.: Probability and Statistics for Business Decisions, New York 1959
- SIEGEL, S.: Nonparametric Statistics, New York 1956
- SIEPERT, H.-M.: Der Einfluss der Losgrösse auf die Produktionsplanung in Walzwerken, Köln 1958
- SLUTZKY, E.: The Summation of Random Causes and the Source of Cyclic Process, Econometrica, Vol. 5, 1937
- SNEDECOR, G.W.: Statistical Methods, Ames, Iowa 1950
- TINTNER, G.: Econometrics, New York 1952
- VAN DER WAERDEN, B.L.: Mathematische Statistik, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1957
- VAZSONYI, A.: Economic-Lot-Size Formulas in Manufacturing, OR, Vol. 5, 1957
- VERBAND FÜR ARBEITSSTUDIEN: Das Refa-Buch, Band 2, Zeitvorgabe, München 1957
- WALD, A.: Berechnung und Ausschaltung von Saisonschwankungen, Wien 1936
- WHITIN, T.M.: Theory of Inventory Management, 2. Edition, Princeton, New Jersey 1957

Nachschlagewerke:

Handwörterbuch der Betriebswirtschaft, Stuttgart 1956

ALFORD, L.P., BANGS, J.R.: Production Handbook, New York 1953

LEBENS LAUF

Am 23. April 1935 wurde ich als zweiter Sohn des Lehrers Friedrich Popp und seiner Ehefrau Hermine, geb. Neukam, in Selb/Ofr. geboren. Ich besuchte in Selb die Volksschule und den mathematisch-naturwissenschaftlichen Zweig der Oberrealschule und legte im Juni 1953 die Reifeprüfung ab.

Vor Beginn meines betriebswirtschaftlichen Studiums arbeitete ich über ein Jahr in einer Porzellanfabrik meiner Heimatstadt, wo ich die praktischen Voraussetzungen für eine Kaufmannsgehilfenprüfung, an der ich im Mai 1956 teilnahm, erwarb. Auf Grund des Kaufmannsgehilfenbriefes konnte ich mein Studium bereits nach sieben Semestern, im Juni 1958, an der Ludwig-Maximilians-Universität in München abschliessen.

Von Oktober 1958 bis Ende März 1959 war ich als wissenschaftlicher Mitarbeiter in der Abteilung Allgemeine Wirtschaftsbeobachtung und Konjunkturpolitik beim IFO-Institut für Wirtschaftsforschung in München tätig. In der Zeit vom 13. April 1959 bis 31. Mai 1960 arbeitete ich bei der Badischen Anilin- und Soda-Fabrik in Ludwigshafen/a. Rh., wo, in ständiger Verbindung mit dem Institut für Statistik und ihre Anwendung in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften der Universität München, die Grundlagen meiner Dissertation entstanden. Die folgenden Monate Juni bis November waren notwendig für eine Ausarbeitung und Formulierung der Ergebnisse meiner Tätigkeit in der Praxis.

München, den 24. November 1960

Werner Popp

